LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 6. Juli 2004

# 6. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Montag, 19. Juli 2004 vor der Übung

**Aufgabe 1** (6 Punkte)
Seien $(F,G)$ ein Dualsystem, $A \subset F$ und $D$ die kreisförmige Hülle von $A$ (siehe Lemma I.3). Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gilt $A^0 = D^0$.

b) Es gilt $A = \{0\}$ genau dann, wenn $A^0 = G$.

c) Es gilt $A = F$ genau dann, wenn $A^0 = \{0\}$.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)
Beweisen Sie Lemma II.18 der Vorlesung:
Seien $E$ und $F$ lokalkonvexe Hausdorffräume mit topologischen Dualräumen $E'$ und $F'$ und sei $f$ ein stetiger linearer Operator von $E$ in $F$. Dann ist $f$ auch stetig als Abbildung von $(E, \sigma(E,E'))$ in $(F, \sigma(F,F'))$.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.1 der Vorlesung:
Seien $E$ ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen und absorbierenden Mengen. Weiter sei $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf $E$, die die Topologie von $E$ erzeugt. Dann sind für beliebige Teilmengen $B \subset E$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $B$ ist beschränkt.

(ii) $B$ wird von jeder Nullumgebung absorbiert.

(iii) Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $\rho > 0$, so dass $B \subset \rho U$.

(iv) Für jede Halbnorm $\rho \in \mathcal{Q}$ ist $\rho(B)$ eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$.

**Aufgabe 4** (7 Punkte)
Beweisen Sie Folgerung III.1 und Lemma III.4 der Vorlesung:
Sei $(F,G)$ ein Dualsystem und $B \subset F$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $B$ ist $\sigma(F,G)$-beschränkt.

(ii) Für alle $y \in G$ ist $\langle B, y \rangle := \{\langle x, y \rangle;\ x \in B\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$.

(iii) $q(y) := \sup\{|\langle x, y \rangle|;\ x \in B\}$ ist eine Halbnorm auf $G$.

(iv) $B^0$ ist eine absorbierende Teilmenge von $G$.

**Definition:** Für einen topologischen Vektorraum $E$ ist die *Dimension* $\dim E$ definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Für einen Vektorunterraum $M$ ist die *Codimension* $\operatorname{codim} M$ definiert als die Dimension von $E/M$.

**Aufgabe 5** (7 Punkte)
Zeigen Sie für einen Hausdorffraum $E$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Jeder Unterraum endlicher Codimension ist dicht in $E$.

(ii) Es existiert keine abgeschlossene Hyperebene in $E$.

(iii) Kein endlich-dimensionaler Unterraum $M$ besitzt einen komplementären Unterraum, d. h. es existiert kein $M \subset E$ mit $\dim M < \infty$, so dass ein Unterraum $N \subset E$ mit $E = M \oplus N$ existiert.

**Definition:** Ein lokalkonvexer Raum heißt *bornologisch*, falls jede absolut konvexe Menge, die alle beschränkten Mengen absorbiert, eine Nullumgebung ist.

**Aufgabe 6** (9 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass Lemma III.3 nicht umkehrbar ist, d. h. dass lokalkonvexe Räume $E$, $F$ und eine beschränkte lineare Abbildung $f$ von $E$ in $F$ existieren, so dass $f$ nicht stetig ist.

b) Seien $E$, $F$ lokalkonvexe Räume und $f$ eine beschränkte lineare Abbildung von $E$ in $F$. Sei $B$ eine Teilmenge von $F$, die alle beschränkten Teilmengen absorbiert. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B)$ alle beschränkten Mengen in $E$ absorbiert.

c) Sei $E$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $E$ ist bornologisch.

(ii) Für jeden lokalkonvexen Raum $F$ gilt: Alle beschränkten linearen Abbildungen $f : E \to F$ sind stetig.

*Hinweis zu* a): Wählen Sie für $F$ einen unendlich dimensionalen Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ und für $E$ den Raum $(E, \sigma(E, E'))$, wobei $E'$ der topologische Dualraum von $(E, \|\cdot\|_E)$ ist. Der Beweis, dass $f = \mathrm{id}$ nicht stetig ist, kann dann z. B. für

$$E = L^2_{2\pi} \text{ mit } \|x\|_{L^2_{2\pi}} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

geführt werden.

**Aufgabe 7** (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die kreisförmige Hülle und der Abschluss einer präkompakten Menge $A \subset E$ eines topologischen Vektorraumes $E$ präkompakt sind.
*Hinweis*: Es darf benutzt werden, dass $E_1 \times E_2$ ein topologischer Vektorraum ist, falls $E_1$ und $E_2$ topologische Vektorräume sind.

b) Sei $E$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $A \subset E$ präkompakt, dann ist $\mathrm{conv}(A)$ i. A. nicht präkompakt und nicht beschränkt.
*Hinweis*: Betrachten Sie $A := \{n^{-1/2}(\delta_{kn})_{k \geq 1};\ n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^{1/2}$.

**Aufgabe 8** (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.25 der Vorlesung:
Sei $E$ lokalkonvex und $A \subset E$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $A$ ist präkompakt.

(ii) Jeder Filter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ besitzt eine Verfeinerung, die Cauchy-Filter ist.

(iii) Jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ ist Cauchy-Filter.

**Aufgabe 9** (4 Punkte)
Zeigen Sie am Beispiel des Dualsystems $(c_0, \ell^1)$, dass Vollständigkeit nicht invariant unter kompatiblen Topologien ist. (Die Kompatibilität der Normtopologie von $c_0$ muss nicht bewiesen werden.)

**Definition:**

a) Sei $E$ ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. $A$ heißt eine *Tonne in* $E$, falls $A$ absolut konvex, absorbierend und abgeschlossen ist.

b) Ein lokalkonvexer Raum $E$ heißt *tonneliert*, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist.

**Definition:** Ein lokalkonvexer Raum $(E, \mathcal{T})$ heißt *absolut stark*, falls $\mathcal{T} = \beta(E, E')$, wobei $E'$ der topologische Dualraum von $E$ ist.

**Aufgabe 10** (3 Punkte)

a) Sei $E$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie: $E$ ist genau dann tonneliert, wenn $E$ absolut stark ist.

b) Sei $E$ ein tonnelierter Hausdorffraum mit topologischem Dualraum $E'$. Zeigen Sie: Die abgeschlossene konvexe Hülle jeder $\sigma(E', E)$-kompakten Teilmenge von $E'$ ist $\sigma(E', E)$-kompakt, ebenso die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle.

*Hinweis*: Verwenden Sie Folgerung III.9