LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 21. Juni 2004

5. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Montag, 5. Juli 2004 vor der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei E ein topologischer Vektorraum und $f \in E^*$, $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass f offen ist, d. h. für alle offenen Mengen $A \subset E$ ist $f(A)$ ebenfalls offen. (vgl. Lemma II.10)

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Sei E ein lokalkonvexer Raum, $B \subset E$ konvex und $a \notin \overline{B}$. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $f \in E'$ mit $f(a) \notin \overline{f(B)}$. (Folgerung II.5)

b) Ist B zusätzlich kreisförmig, so existiert ein $f \in E'$ mit $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in B$ und $f(a) > 1$. (Folgerung II.6)

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei E ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{R}$, $A, B \subset E$ konvex und disjunkt, A offen. Zeigen Sie: Es existieren ein $f \in E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) > \alpha$ für alle $x \in A$ und $f(x) \leq \alpha$ für alle $x \in B$. (Folgerung II.7)

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei E ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{R}$, f ein lineares Funktional auf einem Vektorunterraum M und A eine nichtleere offene konvexe Menge mit $M \cap A \neq \emptyset$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in M \cap A$. Zeigen Sie: Es existiert ein lineares Funktional f_1 auf E, für das gilt:

(i) $f_1(x) = f(x)$ für alle $x \in M$.

(ii) $f_1(x) > 0$ für alle $x \in A$.

(vgl. Lemma II.11)

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Sei (F, G) ein Dualsystem und $\sigma(F, G)$ die schwache Topologie für F. Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in F konvergiert genau dann gegen x im Sinne der schwachen Topologie, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } y \in G.$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)
Zeigen Sie die Umkehrung von Lemma II.14:
Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien für einen Vektorraum E, so dass $(E, \mathcal{T}_1)$ und $(E, \mathcal{T}_2)$ topologische Vektorräume sind. Ferner gelte für konvexe Mengen $A \subset E$, dass A genau dann abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_1$ ist, wenn sie es bezüglich $\mathcal{T}_2$ ist. Dann gilt:

$$(E, \mathcal{T}_1)' = (E, \mathcal{T}_2)'.$$

Aufgabe 7 (9 Punkte)
Seien (F,G) ein Dualsystem und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei kompatible Topologien. Zeigen Sie:

a) Ist eine Menge $A \subset F$ dicht in $(F, \mathcal{T}_1)$, so folgt i. A. nicht, dass A dicht in $(F, \mathcal{T}_2)$ ist.

b) Ist $(F, \mathcal{T}_1)$ separabel, d. h. existiert eine abzählbare dichte Teilmenge von F, so ist auch $(F, \mathcal{T}_2)$ separabel.

Definition: Seien F ein Vektorraum und M_i, $1 \leq i \leq n$, Vektorräume, für die $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = \{0\}$ gilt. Dann heißt

$$E := \operatorname{span}\left\{x;\ x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i\right\}$$

die *algebraische direkte Summe* der M_i.

Bemerkung: Für jedes $x \in E$ existiert dann eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in M_i$, und die Projektionen $\pi_i : E \to M_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \mapsto x_i$ sind wohldefiniert und linear.

Definition: Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie, so dass $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist. Falls die Abbildung $\psi : \prod_{i=1}^{n} M_i \to E, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ ein Isomorphismus ist (d. h. ψ ist bijektiv und sowohl ψ als auch ψ^{-1} sind linear und stetig), so heißt E die (*topologische*) *direkte Summe* von $\{M_i;\ 1 \leq i \leq n\}$. Schreibweise: $E = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Seien $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\{M_i;\ 1 \leq i \leq n\}$ derart, dass E die algebraische direkte Summe der M_i ist. Zeigen Sie:

a) Die Projektionen π_i sind offene Abbildungen, d. h. Bilder offener Mengen sind offen.

b) E ist genau dann topologische direkte Summe, wenn alle Projektionen π_i stetig sind.

Definition: Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und M ein Vektorraum. Der *Quotientenraum* ist definiert als $E/M := \{x + M;\ x \in E\}$.

Bemerkung: Definiert man die Topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ auf E/M als die feinste Topologie, für die die Abbildung $\varphi : E \to E/M, x \mapsto x + M$ stetig ist, so ist $(E/M, \widetilde{\mathcal{T}})$ ein topologischer Vektoraum (siehe Schaefer, pp. 14,20). $\widetilde{\mathcal{T}}$ heißt die *Quotiententopologie*.

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Seien E ein topologischer Vektorraum und M, N Unterräume. Zeigen Sie:

a) E/M ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn M abgeschlossen in E ist.

b) Falls E die algebraische Summe von M und N ist, so gilt:
$E = M \oplus N$ genau dann, wenn die Abbildung $\nu : E/M \to N, x + M \mapsto y$ mit $y \in N$ und $(y - x) \in M$, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10 (7 Punkte)

a) Sei E ein n-dimensionaler Hausdorffraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass E isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Vektorraum der Dimension n an, welcher nicht isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 11 (3 Punkte)
Seien E ein lokalkonvexer Hausdorffraum und x_i, $1 \leq i \leq n$, linear unabhängig in E. Zeigen Sie: Es existieren n Funktionale $f_j \in E'$, $1 \leq j \leq n$, derart, dass

$$f_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 10.