LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 21. Mai 2004

3. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Montag, 7. Juni 2004 vor der Übung

Definition: Eine Abbildung $\|\cdot\|$ von einem Vektorraum E in $\mathbb{R}$ heißt *Quasi-Norm*, falls gilt:

Q_1) Für alle $x \in E$ gilt $\|x\| \geq 0$, und es gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Q_2) Es gilt $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

Q_3) Es existiert ein $k \geq 1$ so, dass $\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$ für alle $x, y \in E$.

E heißt dann *quasi-normiert*.

Definition: Eine Teilmenge B eines topologischen Vektorraumes E heißt *beschränkt*, falls für jede Nullumgebung U ein $\rho > 0$ existiert, so dass $B \subset \rho U$. Ein Vektorraum E heißt *lokalbeschränkt*, falls er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein topologischer Vektorraum genau dann quasi-normierbar ist, wenn er ein lokalbeschränkter Hausdorffraum ist.

Bemerkung 1: Für lokalkonvexe Räume gilt die folgende Variante:
Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann normierbar, wenn er ein lokalbeschränkter Hausdorffraum ist.

Definition: Sei $0 < p \leq 1$. Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heißt *p-konvex*, falls $\lambda x + \mu y \in A$ für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda, \mu \geq 0$ mit $\lambda^p + \mu^p = 1$.

Definition: Sei $0 < p \leq 1$. Eine Abbildung $|||\cdot|||$ von einem Vektorraum E in $\mathbb{R}$ heißt eine *p-Norm*, falls gilt:

P_1) Für alle $x \in E$ gilt $|||x||| \geq 0$, und es gilt $|||x||| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

P_2) Es gilt $|||\alpha x||| = |\alpha|^p |||x|||$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

P_3) Es gilt $|||x+y||| \leq |||x||| + |||y|||$ für alle $x, y \in E$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Topologie des Raumes E genau dann durch eine p-Norm gegeben werden kann, wenn E eine p-konvexe beschränkte Nullumgebung besitzt.
Hinweis: Für die Rückrichtung verwende man Bemerkung 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma I.15 der Vorlesung:
Seien $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf einem Vektorraum E und $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$ die von $\mathcal{Q}$ erzeugte Topologie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $(E, \mathcal{T}_\mathcal{Q})$ ist ein Hausdorffraum.

(ii) Zu jedem $x \in E$ mit $x \neq 0$ existiert ein $p \in \mathcal{Q}$ mit $p(x) > 0$.

(iii) $\mathcal{Q}$ ist total.

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Sei $s := \{x = (x_k)_{k\geq 1};\ x_k \in \mathbb{C}\}$ der Raum aller Zahlenfolgen und d die Metrik

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \qquad \text{für alle } x = (x_k)_{k\geq 1}, y = (y_k)_{k\geq 1} \in s.$$

a) Sei $\mathcal{U}_{\varepsilon,\mathcal{J}} := \{x \in s;\ \max_{k\in\mathcal{J}} |x_k| < \varepsilon\}$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ endlich. Zeigen Sie, dass $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_{\varepsilon,\mathcal{J}};\ \varepsilon > 0,\ \mathcal{J} \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

b) Zeigen Sie mittels Bemerkung 1, dass für s keine Norm existiert, die die gleiche Topologie $\mathcal{T}_d$ erzeugt wie d.

c) Beweisen Sie direkt, dass $(s, \mathcal{T}_d)$ nicht normierbar ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)
(vgl. die Bemerkung nach Lemma II.1) Seien E, F lokalkonvexe Räume über $\mathbb{K}$, deren Topologien durch Familien $\mathcal{Q}_E$ und $\mathcal{Q}_F$ von Halbnormen bestimmt sind. Weiter sei $f : E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) f ist stetig auf E.

(ii) Zu jeder beliebigen stetigen Halbnorm q auf F existiert eine stetige Halbnorm p auf E, so dass

$$q(f(x)) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

(iii) Zu jeder beliebigen Halbnorm $q \in \mathcal{Q}_F$ existieren ein $M > 0$ und Halbnormen $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{Q}_E$, so dass

$$q(f(x)) \leq M \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Definition: Sei E ein Vektorraum und $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf E. $\mathcal{Q}$ heißt *saturiert*, falls für beliebige $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{Q}$ auch $\max_{1\leq k\leq n} p_k$ eine Halbnorm aus $\mathcal{Q}$ ist.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass sich jede lokalkonvexe Topologie durch eine saturierte Familie von Halbnormen erzeugen lässt.

b) Wie wirkt es sich auf das Stetigkeitskriterium in Aufgabe 5 aus, wenn $\mathcal{Q}$ saturiert ist?

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Sei I eine überabzählbare Menge und $S(I) := \{f : I \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen f auf I. Durch die Familie von Halbnormen

$$\{p_t(f) := |f(t)|;\ t \in I\}$$

sei eine lokalkonvexe Topologie auf $S(I)$ erzeugt. Zeigen Sie, dass es keine Metrik gibt, die diese Topologie erzeugt.
Hinweis: Benutzen Sie die Nullumgebungsbasis aus Satz I.3.