Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 30.06.2003

9. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 07.07.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Seien $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Zeigen Sie:

a) Gilt $x^n = a$ für ein $x \in \mathbb{Q}$, so ist $x \in \mathbb{Z}$. $\boxed{3}$

b) Die Gleichung $x^n = a$ hat genau dann eine Lösung in $\mathbb{Q}$, wenn $a = m^n$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Zeigen sie, dass es keinen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ gibt. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei K ein Körper. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $f : \mathbb{Z} \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $F : \mathbb{Q} \to K$ mit $F|_{\mathbb{Z}} = f$. Dieses F ist injektiv. $\boxed{4}$

b) Satz von der universellen Eigenschaft: Gibt es zu jedem Körper k und jedem injektiven Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Z} \to k$ genau einen Ringhomomorphismus

$$F : K \to k \quad \text{mit} \quad F(n \cdot 1) = f(n) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

dann ist K isomorph zu $\mathbb{Q}$. $\boxed{3}$

c) Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to K$ mit $f(n) = n \cdot 1$ injektiv, dann ist der Primkörper P von K, also der Durchschnitt aller Unterkörper von K, isomorph zu Q. Wie lautet die Aussage für den Fall, dass f nicht injektiv ist. $\boxed{3}$

d) Jeder injektive Ringhomomorphismus $f : K \to \mathbb{Q}$ ist ein Isomorphismus. $\boxed{1}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie folgende Aussagen für eine Folge $a = (a_n)_n$ in einem angeordneten Körper $(K, <)$ (vgl. Lemma 4.21 der Vorlesung):

a) Wenn a konvergent ist, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

b) Wenn a konvergent ist, so ist a eine Cauchy-Folge.

c) Wenn a eine Cauchy-Folge ist, so ist a beschränkt.

d) a besitzt eine monotone Teilfolge.

e) Ist a eine Cauchy-Folge, aber keine Nullfolge, dann existieren $\delta \in K$, $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_n| \geq \delta$ für alle $n \geq N$. $\boxed{6}$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper ist (vgl. Satz 4.18 der Vorlesung). $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + m/2 \quad (m \in \mathbb{N}_0, 2^m \leq n).$$

Folgern Sie daraus die Divergenz der harmonischen Reihe. $\boxed{4}$

Aufgabe 7: Zeigen Sie aus Satz 4.26 der Vorlesung: Ist I ein Ideal in einem Ring R und $R/I := \{a + I;\ a \in R\}$ die Quotientenmenge. Dann ist die Verknüpfung

$$(a + I) \cdot (b + I) := (a \cdot b) + I$$

auf R/I wohldefiniert, und $(R/I, \cdot)$ bildet eine Halbgruppe. $\boxed{4}$

$\boxed{\boxed{37}}$