Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 02.06.2003

6. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 16.06.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführte Multiplikation $\odot$ sowie die Kleiner-oder-gleich-Relation $\textcircled{\le}$ unabhängig von den gewählten Repräsentanten sind. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: In einem Ring $(R, +, \cdot)$ gelten für $a, b, c \in R$ die folgenden Regeln (vgl. Lemma 3.8 der Vorlesung):

a) Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$. $\boxed{1}$

b) Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine Lösung $x \in R$, nämlich $x = b + (-a)$. $\boxed{1}$

c) $-(-a) = a$, $-(a + b) = (-a) + (-b)$, $-0 = 0$. $\boxed{1}$

d) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. $\boxed{1}$

e) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$. $\boxed{1}$

f) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie aus Satz 3.10 der Vorlesung: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer, unitärer Ring. $\boxed{8}$

Aufgabe 4: Sei $(R, <)$ ein angeordneter, unitärer Ring. Zeigen Sie, dass für alle a, b, c, $d \in R$ gilt (vgl. Lemma 3.18 der Vorlesung):

a) $a < b$ ist äquivalent zu $-b < -a$. $\boxed{1}$

b) Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$. $\boxed{1}$

c) Aus $0 \le a < b$ und $0 \le c < d$ folgt $ac < bd$. $\boxed{2}$

d) Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$ und $ca > cb$. $\boxed{2}$

e) Es gilt $1 > 0$ und $a^2 > 0$ für alle $a \in R$, $a \neq 0$. $\boxed{3}$

f) Sei $0 < a < b$, so dass $a^{-1} \in R$ und $b^{-1} \in R$ existieren. Dann gilt $0 < b^{-1} < a^{-1}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei $(R, <)$ ein angeordneter, unitärer Ring. Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in R$ gilt (vgl. Lemma 3.21 der Vorlesung):

a) $a \leq |a|$, $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$. $\boxed{2}$

b) $|-a| = |a|$. $\boxed{2}$

c) $|ab| = |a|\,|b|$. $\boxed{2}$

d) $|a^{-1}| = |a|^{-1}$, falls $a^{-1} \in R$ existiert. $\boxed{2}$

e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung). $\boxed{2}$

f) $|a - b| \geq ||a| - |b||$. $\boxed{2}$

$\boxed{44}$