Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 21.07.2003

12. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 28.07.2003, vor der Übung.
Für den Erhalt eines Übungsscheines bzw. qualifizierten Studiennachweises sind 60 % der Übungspunkte der ersten elf Übungen notwendig. Bei der Punktevergabe wird die Bearbeitung dieser zwölften Übung berücksichtigt.)

Aufgabe 1: Beweisen Sie ohne Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra die folgenden Aussagen:

a) Sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Dann existieren genau zwei verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = a$. $\boxed{5}$

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Es gibt genau dann zwei verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit $az^2 + bz + c = 0$, wenn $b^2 - 4ac \neq 0$ gilt. Im Fall $b^2 - 4ac = 0$ gibt es genau ein solches $z \in \mathbb{C}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

a) $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, $\boxed{2}$

b) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. $\boxed{2}$

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung der folgenden Aufgaben die Reihenentwicklung $\exp(x) := e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ sowie die Stetigkeit von $\exp(x)$ und des natürlichen Logarithmus $\ln(x) := \log_e(x), x \in \mathbb{R}^+$, als bekannt voraussetzen. Dabei ist $e := \exp(1)$ die Eulersche Zahl.

Aufgabe 3: Leiten Sie für die Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ die Reihenentwicklung

$$\exp_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \,, \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

her, und beweisen Sie damit die Funktionalgleichung

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y), \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$ $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Zeigen Sie, dass dann $\log_a(x)$ langsamer wächst als jede Potenz von x, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a(x)}{x^k} = 0$. $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Zeigen Sie $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$. $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $\exp_a$ und $\log_a$. $\boxed{3}$

Aufgabe 7: Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ die Menge $\{\log_a p;\ p \in \mathbb{P}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 8: Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

a) Für $a \neq 1$ gilt $b^x = a^{x \cdot \log_a(b)}$. $\boxed{2}$

b) Für $a, b \neq 1$ gilt $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$. $\boxed{2}$

c) Für $a \neq 1$ gilt $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$. $\boxed{1}$

d) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$. $\boxed{2}$

e) Ist $1 < a < b$, so gilt $a^x < b^x$ für $x > 0$ und $a^x > b^x$ für $x < 0$. $\boxed{2}$

Aufgabe 9: Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

a) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\cos t \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + r_{2N}(t), \quad \sin t \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+1}(t).$$

Dabei gilt $\quad |r_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n!} \qquad (\,|t| \leq n+1, n \in \mathbb{N}\,)$. $\boxed{3}$

b) $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$. $\boxed{2}$

c) $\sin t > 0$ für alle $t \in\ (0, 2]$. $\boxed{2}$

d) $\cos|_{[0,2]}$ ist streng monoton fallend. $\boxed{3}$

e) $\cos t$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$. $\boxed{2}$

Definition. Ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ heißt ein *Pythagoräisches Tripel*, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Man nennt es darüber hinaus *primitiv*, wenn $\operatorname{ggT}(a, b, c) = 1$ gilt.

Aufgabe 10: Sei (a, b, c) ein Pythagoräisches Zahlentripel. Zeigen Sie:

a) 4 ist ein Teiler von a oder von b. $\boxed{3}$

b) 3 ist ein Teiler von a oder von b. $\boxed{3}$

c) 5 ist ein Teiler von a, b oder c. $\boxed{3}$

Aufgabe 11: Zeigen Sie: Die Gleichung $a^4 + b^2 = c^4$ besitzt keine Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass man die primitiven Pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit geradem a genau einmal in der Form

$$(a, b, c) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$$

erhält, wobei $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teilerfremd, nicht beide ungerade mit $u > v$ sind. $\boxed{6}$

$\boxed{\boxed{64}}$