LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 31. Juli 2003

Musterlösung der 14. Übung zur Analysis IV

Aufgabe 1 (je 3* Punkte)
Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a>0$, $b>0$ und $c>1$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(c+\cos x)^2}.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t}\,dt.$

Lösung

a) $R(x) := \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ ist eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat. Der Grad des Nennerpolynoms ist 4 und damit um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms. Daher gilt nach Satz XXI (3.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname{Res}_w(R).$$

$R(x)$ hat in der oberen Halbebene nur einfache Pole in ia und ib (oder im Fall $a=b$ einen Pol zweifacher Ordnung in $ia=ib$).

1. Fall: $a\neq b$

$$\operatorname{Res}_{ia}(R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(ia)} \frac{z^2}{(z+ia)(z^2+b^2)}\frac{dz}{z-ia} \overset{C.I.F.}{=} \frac{(ia)^2}{2ia(-a^2+b^2)} = \frac{-a}{2i(b^2-a^2)}$$

und analog

$$\operatorname{Res}_{ib}(R) = \frac{-b}{2i(a^2-b^2)}.$$

2. Fall: $a=b$

$$\operatorname{Res}_{ia}(R) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(ia)} \frac{z^2}{(z+ia)^2}\frac{dz}{(z-ia)^2} \overset{C.I.F.}{=} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+ia)^2}\right)\Bigg|_{z=ia} = \cdots = \frac{1}{4ia}.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi(b-a)}{b^2-a^2} & a\neq b,\\ \frac{\pi}{2a} & a=b.\end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\,dx \overset{t=bx}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R(t)\sin t\,dt$, wobei $R(t) = \dfrac{t}{(ab)^2+t^2}$ eine rationale Funktion ist, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat. Der Grad des Nennerpolynoms ist größer als der Grad des Zählerpolynoms. Daher ist nach Satz XXI (3.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\,dx = 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname{Res}_w(R(z)e^{iz})\right).$$

$R(z)e^{iz} = \frac{ze^{iz}}{(z+iab)(z-iab)}$ hat in der oberen Halbebene nur einen einfachen Pol in iab mit

$$\operatorname{Res}_{iab}(R(z)e^{iz}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(iab)} \frac{ze^{iz}}{z+iab}\frac{dz}{z-iab} \overset{C.I.F.}{=} \frac{e^{-ab}}{2}.$$

Deshalb ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\,dx = \pi e^{-ab}.$$

c) $R(x,y) := \frac{1}{(c+x)^2}$ ist eine rationale Funktion, die wegen $c>1$ auf $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\, x^2+y^2=1\}$ definiert ist. Definiere

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{4z}{(z^2+2cz+1)^2}.$$

Nach Satz XXI (3.1) ist dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c+\cos t)^2} = \int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt = 2\pi \sum_{a\in K_1(0)} \operatorname{Res}_a(\tilde{R}).$$

$z^2+2cz+1 = (z-z_1)(z-z_2)$, wobei $z_1 := -c-\sqrt{c^2-1} < -1$, also $z_1 \notin K_1(0)$, und $-1 < z_2 := -c+\sqrt{c^2-1} < 0$, da $\frac{1}{z_2} = \frac{\sqrt{c^2-1}+c}{-1} < -1$, also $z_2 \in K_1(0)$. $\tilde{R}$ hat also in $K_1(0)$ nur einen zweifachen Pol in z_2 mit

$$\operatorname{Res}_{z_2}(\tilde{R}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_\varepsilon(z_2)} \frac{4z}{(z-z_1)^2}\frac{dz}{(z-z_2)^2} \overset{C.I.F.}{=} \frac{d}{dz}\left(\frac{4z}{(z-z_1)^2}\right)\bigg|_{z=z_2} = \cdots = \frac{c}{(c^2-1)^{3/2}}.$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(c+\cos t)^2} = \frac{2\pi c}{(c^2-1)^{3/2}}.$$

d) $R(x,y) := \frac{x+y}{2+y}$ ist eine rationale Funktion, die auf $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\, x^2+y^2=1\}$ definiert ist. Definiere

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \cdots = \frac{(1+i)z^2+i-1}{z(z^2+4iz-1)}.$$

Nach Satz XXI (3.1) ist dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t}\,dt = \int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt = 2\pi \sum_{a\in K_1(0)} \operatorname{Res}_a(\tilde{R}).$$

$z^2+4iz-1 = (z-(-2i-i\sqrt{3}))(z-(-2i+i\sqrt{3}))$, wobei $(-2-\sqrt{3})i \notin K_1(0)$ und $(-2+\sqrt{3})i \in K_1(0)$. $\tilde{R}$ hat also in $K_1(0)$ nur Pole in 0 und in $(-2+\sqrt{3})i$ mit

$$\operatorname{Res}_0(\tilde{R}) \overset{C.I.F.}{=} \frac{(1+i)z^2+i-1}{z^2+4iz-1}\bigg|_{z=0} = 1-i \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Res}_{(-2+\sqrt{3})i}(\tilde{R}) \overset{C.I.F.}{=} \frac{(1+i)z^2+i-1}{z(z+(2+\sqrt{3})i)}\bigg|_{z=(-2+\sqrt{3})i} = \cdots = i-\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t}\,dt = 2\pi(\operatorname{Res}_0(\tilde{R})+\operatorname{Res}_{(-2+\sqrt{3})i}(\tilde{R})) = (2-\frac{4}{3}\sqrt{3})\pi.$$

Aufgabe 2 ($6^* + 2^*$ Punkte)

a) Sei $R(x)$ eine auf $\mathbb{R}_+$ polstellenfreie rationale Funktion mit $R(0) \neq 0$ und existiere ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, so dass

$$\lim_{x\to\infty} x^\lambda |R(x)| = 0,$$

ist. Zeigen Sie: Ist

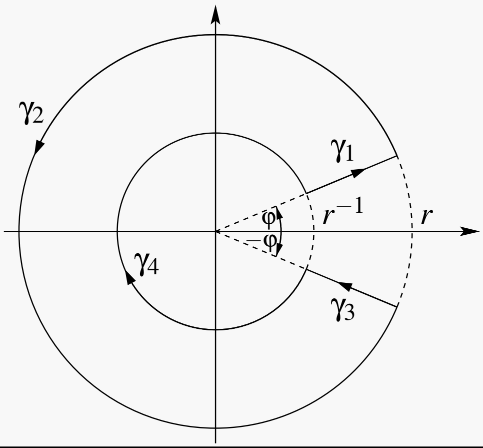
$$f(z) = (-z)^{\lambda-1} R(z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+,$$

wobei $(-z)^{\lambda-1} := \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-z))$ sei, dann gilt

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} R(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_a(f).$$

b) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $0 < \lambda < 1$ das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{x+a}\,dx.$

Hinweis zu a): Betrachten Sie einen Integrationsweg wie in der nebenstehenden Skizze und lassen Sie $r \to \infty$ gehen.



Lösung

a) Da $(-z)^{\lambda-1} = \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-z))$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ ist, ist f meromorph in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Sei $\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, wobei

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [\tfrac{1}{r}, r] \to \mathbb{C}, t \mapsto te^{i\varphi},\\
\gamma_2 &: [\varphi, 2\pi-\varphi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it},\\
\gamma_3 &: [-r, -\tfrac{1}{r}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -te^{-i\varphi},\\
\gamma_4 &: [\varphi, 2\pi-\varphi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{r}e^{i(2\pi-t)}.
\end{aligned}$$

Da R eine auf $\mathbb{R}_+$ polstellenfreie rationale Funktion ist, sind für $r \gg 0$ und $0 < \varphi \ll 2\pi$ alle Polstellen von R im Inneren von Γ. Also gilt nach dem Residuensatz

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_a(f),$$

da offensichtlich $n_\Gamma(a) = 1$ für alle a im Inneren von Γ. Sei $r > 1$ beliebig, fest. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_1} e^{(\lambda-1)\operatorname{Log}(-z)} R(z)\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{1/r}^{r} e^{(\lambda-1)\operatorname{Log}(-te^{i\varphi})} R(te^{i\varphi}) e^{i\varphi}\, dt \\
&= \int_{1/r}^{r} e^{(\lambda-1)(\log t + i(\varphi-\pi))} R(te^{i\varphi}) e^{i\varphi}\, dt,
\end{aligned}
$$

denn $\operatorname{Log}(-te^{i\varphi}) = \log t + i\arg(te^{i(\varphi-\pi)}) = \log t + i(\varphi-\pi)$. Da der Integrand als Funktion von (t,φ) stetig ist, folgt für $\varphi \to 0$

$$
\lim_{\varphi\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{1/r}^{r} e^{(\lambda-1)(\log t - i\pi)} R(t)\, dt = -e^{-i\pi\lambda} \int_{1/r}^{r} t^{\lambda-1} R(t)\, dt.
$$

Analog folgt

$$
\lim_{\varphi\to 0} \int_{\gamma_3} f(z)\, dz = e^{i\pi\lambda} \int_{1/r}^{r} t^{\lambda-1} R(t)\, dt.
$$

Also ist

$$
\lim_{r\to\infty} \lim_{\varphi\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_3} f(z)\, dz = 2i\sin(\lambda\pi) \int_{0}^{\infty} t^{\lambda-1} R(t)\, dt.
$$

Sei $R = \frac{P}{Q}$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} x^\lambda |R(x)| = 0$, gilt $\operatorname{grad} Q > \lambda + \operatorname{grad} P$, d. h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\operatorname{grad} Q \geq \lambda + \varepsilon + \operatorname{grad} P$. Daher ist

$$
|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^{\lambda+\varepsilon}} \quad \text{für } |z| > \tilde{R}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_{\gamma_2} e^{(\lambda-1)\operatorname{Log}(-z)} R(z)\, dz \right| \\
&\leq \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} r e^{(\lambda-1)\log r} \left| R(re^{it}) \right| dt \\
&= r^\lambda \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} \left| R(re^{it}) \right| dt \\
&\overset{r>\tilde{R}}{\leq} r^\lambda \int_{0}^{2\pi} \frac{M}{r^{\lambda+\varepsilon}}\, dt \\
&= \frac{2\pi M}{r^\varepsilon} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$
\lim_{r\to\infty} \left| \int_{\gamma_4} f(z)\, dz \right| = 0.
$$

Insgesamt folgt damit

$$
\sin(\lambda\pi) \int_{0}^{\infty} t^{\lambda-1} R(t)\, dt = \pi \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_a(f).
$$

Für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ folgt damit direkt die Behauptung und für $\lambda \in \mathbb{Z}$ folgt die Behauptung durch stetige Fortsetzung in $\hat{\mathbb{C}}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann ist $R(x) := \frac{1}{x+a}$ eine auf $\mathbb{R}_+^*$ polstellenfreie rationale Funktion mit $R(0) \neq 0$ und

$$
\lim_{x\to\infty} x^\lambda \left| \frac{1}{x+a} \right| = 0.
$$

Definiere $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)\operatorname{Log}(-z)}}{z+a}$. Bis auf einen einfachen Pol in $-a$ mit $\operatorname{Res}_{-a}(f) = e^{(\lambda-1)\operatorname{Log} a} = a^{\lambda-1}$ ist f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$. Also ist nach a)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{x+a}\, dx = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi} \operatorname{Res}_{-a}(f) = \frac{\pi a^{\lambda-1}}{\sin \lambda\pi}.$$

Aufgabe 3 (10* Punkte)
Sei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und $\Psi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ (wohldefiniert?). Zeigen Sie:

a)
$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

b)
$$\Psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

c) Die Integraldarstellung aus b) stellt für $\operatorname{Re}(s) > 0$ eine holomorphe Funktion dar.

d) $\zeta(s)$ lässt sich in die Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(s) > 0\}$ meromorph fortsetzen und hat höchstens Pole in $s = 1$ oder $s = 1 \pm \frac{2\pi i k}{\log 2}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

e) Führen Sie die Aufgabenteile b)-d) für $(1-3^{1-s})\zeta(s)$ durch.

f) $\zeta(s)$ hat genau einen Pol in $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$ und zwar bei $s = 1$.
Hinweis: $\frac{\log 3}{\log 2}$ ist irrational.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $\Psi(s)$ konvergiert genau für $\operatorname{Re}(s) > 0$, was aber nicht ganz so einfach zu zeigen ist. Sie konvergiert genau für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut.
$\zeta(s)$ lässt sich mit Hilfe einer Funktionalgleichung auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen. Sie hat bei $s = 1$ ihren einzigen Pol, der einfach ist. Das Residuum ist 1. Die (noch unbewiesene) Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen (also nicht die einfachen Nullstellen in $z \in -2\mathbb{N}$) auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Bekannt ist, dass alle sonstigen Nullstellen im Streifen $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ liegen. Zusätzlich bewiesen ist, dass unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen.

Lösung Da $\zeta(s)$ und $1 - 2^{1-s}$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ definiert und holomorph sind, ist Ψ dort wohldefiniert. Mit der Substitution $u = nt$ folgt

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt}\, dt = n^{-s+1} n^{-1} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u}\, du = \Gamma(s) n^{-s}.$$

Konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ lokal gleichmäßig, so gilt

$$\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty F(e^{-t}) t^{s-1}\, dt \tag{1}$$

mit $F(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$. Gleichung (1) heißt auch *Mellinsche Transformationsformel*.

a) Für $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ ist die zugehörige Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{z}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Also ist

$$F(e^{-t}) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1} \quad \text{für } t>0$$

und mit (1) folgt die Behauptung.

b) Für $\Psi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$ ist die zugehörige Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^n = \frac{z}{1+z} \quad \text{für } |z|<1.$$

Also ist

$$F(e^{-t}) = \frac{1}{e^t+1} \quad \text{für } t>0$$

und mit (1) folgt die Behauptung.

c) Wir gehen analog vor wie für die Gammafunktion in Satz XX (5.4): Für $0<\sigma=\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,dt\right| \le \int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}}{e^t+1}\,dt \le \int_0^1 t^{\sigma-1}\,dt < \infty$$

und

$$\left|\int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,dt\right| \le \int_1^{\infty} \frac{t^{\sigma-1}}{e^t+1}\,dt \le M\int_1^{\infty} t^{-2}\,dt < \infty,$$

da $e^t+1 \ge Mt^{\sigma+1}$ für alle $t\in[1,\infty)$. Da $(s,t)\mapsto \frac{t^{s-1}}{e^t+1}$ auf $U=\{s\in\mathbb{C};\,\mathrm{Re}(s)>0\}\times(0,\infty)$ holomorph ist und

$$\frac{d}{ds}\frac{t^{s-1}}{e^t+1} = \frac{\log t}{e^t+1}t^{s-1}$$

stetig auf U ist folgt mit XVIII (5.3), dass

$$s\mapsto \int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,dt$$

holomorph ist für $\mathrm{Re}(s)>0$. Nach Aufgabe 2 der 9. Übung ist $\Gamma(s)$ ebenfalls holomorph für $\mathrm{Re}(s)>0$ und wegen

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s)>0$$

ist Γ nullstellenfrei für $\mathrm{Re}(s)>0$. Damit folgt die Behauptung.

d) Nach c) ist Ψ holomorph auf der rechten Halbebene. $1-2^{1-s}$ hat genau einfache Nullstellen in $s=1\pm\frac{2\pi ik}{\log 2}$ für $k\in\mathbb{Z}$, denn

$$2^{1-s}=1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{(1-s)\log 2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad (1-s)\log 2 = 2\pi ik,\ k\in\mathbb{Z},$$

und die Ableitung ist an diesen Stellen ungleich Null. Also lässt sich ζ auf die rechte Halbebene meromorph fortsetzen und hat dort höchstens Pole in diesen s.

e) Analog zu b)-d) erhalten wir:

$$(1-3^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \text{ wobei } a_n = \begin{cases} -2 & 3|n, \\ 1 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Das zugehörige F lautet $F(e^{-t}) = \frac{e^{2t}+e^t-2}{e^{3t}-1}$. Insgesamt folgt, dass ζ höchstens Pole in $s=1\pm\frac{2\pi ik}{\log 3}$ hat.

f) Angenommen $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist $3^q = 2^p$ was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung ist. Also sind $\log 2$ und $\log 3$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig. Daher hat ζ nach d) und e) auf der rechten Halbebene höchstens einen einfachen Pol in $s = 1$. Da $\zeta(1)$ gerade die harmonische Reihe ist, liegt dort auch tatsächlich ein Pol vor.