LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 24. Juli 2003

# 13. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 1. August 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

**Hinweis** Die Musterlösung zu dieser Übung wird ab dem 1. August im Netz verfügbar sein. Vorgerechnet wird diese Übung am Montag, 4. August, um 10:00 Uhr in Hörsaal III.

**Klausuren** Die Klausuren finden an folgenden Terminen statt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Klausur | Donnerstag, 07. 08. 2003 | 08:30 Uhr | Fo 1 |
| 2. Klausur | Mittwoch, 08. 10. 2003 | 13:30 Uhr | Fo 1 |

Zur Teilnahme an den Klausuren ist eine Anmeldung erforderlich. Sie können sich entweder per E-Mail (Name und Matrikelnummer angeben und wenn möglich digital signieren: ana4ss03k1@matha.rwth-aachen.de bzw. ana4ss03k2@matha. . . ) oder durch Eintragen in die im Sekretariat ausliegenden Listen anmelden. Die Rückgabetermine stehen noch nicht fest.
Die beiden Klausuren behandeln den kompletten Stoff der Vorlesung Analysis IV in diesem Semester, d. h. auch den Stoff der ersten 3 Übungen (Vektoranalysis). Die erste Klausur geht dabei über den Stoff der ersten 13 Übungen, die zweite Klausur beinhaltet auch die 14. Übung.
Die Vordiplomsklausuren bzw. Zwischenprüfungsklausuren zur Analysis I/II und Analysis III/IV (bzw. Analysis I-IV für Physiker) von Prof. Görlich und Prof. Krieg finden statt am Freitag, dem 19. 09. 2003, um 8.30 Uhr im Grünen und Roten Hörsaal.

**Aufgabe 1** (3 Punkte) Sei $g$ holomorph auf einem Gebiet $G$ mit $\overline{K_1(0)} \subset G$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass die Gleichung $g(z) = z$ genau eine Lösung für $|z| < 1$ hat, falls $|g(z)| < 1$ ist für alle $z$ mit $|z| = 1$.

**Aufgabe 2** (2+2 Punkte)

a) Es sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(z) := z + a$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in einer punktierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Res}_{z_0}\, g = \mathrm{Res}_{z_0 - a}(g \circ \varphi).$$

b) Sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\phi(z) := az$ für ein $a \in \mathbb{C}^*$. Drücken Sie $\mathrm{Res}_{z_0}\, g$ durch $\mathrm{Res}_{z_0/a}(g \circ \phi)$ analog zu a) aus.

**Aufgabe 3** (2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Residuen:

a) $\mathrm{Res}_0 \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, für $n \in \mathbb{Z}$,

b) $\mathrm{Res}_0 \dfrac{z-1}{\mathrm{Log}(z+1)}$.

**Aufgabe 4** (2+2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten, die außerhalb des Definitionsbereiches liegen:

a) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$,

b) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$,

c) $z\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$,

d) $\dfrac{1}{\sin(\pi z)}$.

**Aufgabe 5** (3+3 Punkte) Seien $f,g$ holomorph in $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

a) Hat $g$ in $a$ eine Nullstelle 1. Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_a \frac{f}{g^2} = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{(g'(a))^3}.$$

b) Hat $g$ in $a$ eine Nullstelle 2. Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_a \frac{f}{g} = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3(g''(a))^2}.$$

**Aufgabe 6** (4+2 Punkte)

a) Sei $0 \neq w \in \mathbb{C}$. Sei $f$ eine auf dem Gebiet

$$T_w := \{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im}\left(\frac{2\pi}{w}z\right) < b\}, \quad a,b \in \mathbb{R}, a < b$$

holomorphe Funktion mit der Periode $w$, d. h. $f(z+w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dann besitzt $f$ eine eindeutige Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi i}{w}nz\right),$$

die auf $T_w$ lokal gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Für $z_0 \in T_w$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{w}\int_{[z_0;z_0+w]} f(\zeta)\exp\left(-\frac{2\pi i}{w}n\zeta\right)\, d\zeta.$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe zu $\dfrac{1}{\cos z}$.