LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 28. Mai 2003

6. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 6. Juni 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+2+2 Punkte)
Für $U \subset \mathbb{C}$ offen sei $\mathcal{W}(U)$ die Menge aller Wege in U. Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{W}(U)$ definieren wir

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \gamma_1 \text{ entsteht aus } \gamma_2 \text{ durch Umparametrisierung.}$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äqivalenzrelation auf $\mathcal{W}(U)$ ist.

Beweisen Sie außerdem für $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^*, \gamma_2^* \in \mathcal{W}(U)$:

b) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1^- \sim \gamma_2^-$.

c) Gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_1^* \sim \gamma_2^*$ und stimmen der Endpunkt von γ_1 und der Anfangspunkt von γ_1^* überein, so gilt:

$$\gamma_1 \oplus \gamma_1^* \sim \gamma_2 \oplus \gamma_2^*.$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)
Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\, dz$ für die folgenden Funktionen, wobei γ ein beliebiger Weg von $-i$ nach i sei, dessen Spur im Definitionsbereich der jeweiligen Funktion liegt.

a) $z \sin(iz^2)$

b) $\frac{z^4 - i}{z^2}$

c) $\sinh(iz+1)$

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{[i,z]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-.$$

c) Sei $\triangle$ das Dreieck mit den Eckpunkten -1, $1-i$, $1+i$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial\triangle} \frac{1}{z}\, dz.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Desweiteren haben die f_n jeweils eine Stammfunktion F_n mit der Eigenschaft, dass die Folge $(F_n(z_0))_n$ für ein $z_0 \in G$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann auch f eine Stammfunktion besitzt.