LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 8. Mai 2003

# 3. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 16. Mai 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

**Aufgabe 1** (4 Punkte) Ein fester Körper $A$ (hier: $A \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand) befinde sich in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ des $(x_1, x_2, x_3)$-Raumes zusammenfalle. Im Punkt $a \in \partial A$ übt die Flüssigkeit auf den Körper einen Druck der Größe $cx_3\nu(x)$ aus, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor von $A$ im Punkt $x$ ist. Man berechne die gesamte Auftriebskraft $K = (K_1, K_2, K_3)^t$, gegeben durch

$$K_i = \int_{\partial A} cx_3\nu_i(x)\,dS(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}$ das äußere Normaleneinheitsfeld. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $A \subset U$ und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Beweisen Sie die folgende Greensche Formel:

$$\int_A \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle \; d\lambda_n + \int_A f \cdot \Delta g \; d\lambda_n = \int_{\partial A} f \cdot \langle \operatorname{grad} g, \nu\rangle \; dS_{n-1}.$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte) Sei $S_n^+$ die folgende Teilmenge der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$:

$$S_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2^2 = 1 \text{ und } x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie für $p_i \in \mathbb{R}_+$ und für $i = 1, \ldots, n$:

$$\int_{S_n^+} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} \; dS_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \Gamma\left(\frac{p_n+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{p_1+\ldots+p_n+n}{2}\right)}.$$

*Hinweis.* Berechen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} e^{-\|x\|_2^2} \; d\lambda_n$$

auf zwei verschiedene Arten.

**Aufgabe 4** (3+3 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes die folgenden Integrale. Achten Sie besonders auf die Voraussetzungen.

a)

$$\int_{\partial A} 2y\,dx - 2x\,dy + z^2 x\,dz$$

für $\partial A = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; x = \cos t, y = \sin t, z = 5, 0 \leq t < 2\pi\}$.

b)

$$\int_{\partial A} yz^2\,dx + (xz^2 - 2y)\,dy + 2xyz\,dz$$

für $\partial A = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3; x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

**Aufgabe 5** (3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ konvex, offen und $F = (F_1, F_2, F_3)^t : U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:

   (i) $F$ ist ein Gradientenfeld auf $U$.

   (ii) $\operatorname{rot} F = 0$ auf $U$.

b) Gilt die Aussage von a) auch, wenn $U$ nicht konvex ist?