LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 18. Juni 2003

5. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie

Abgabe: Montag, 30.06.2003, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte):
Es sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \in R[x]$. Die Funktion $f' = \sum_{i=1}^{m} f_i x^{i-1} \in R[x]$ bezeichne die aus der Analysis bekannte Ableitung von f. Wir definieren die Diskriminante von f als

$$\operatorname{disc} f := (-1)^{m(m-1)/2} \frac{\operatorname{Res}(f, f')}{f_m}.$$

Zeigen Sie

a) Ist $R = \mathbb{Z}$, f irreduzibel und normiert (also $f_m = 1$) und α eine Nullstelle von f in $\mathbb{Q}(\alpha)$, so ist

$$\operatorname{disc} f = d_{\mathbb{Q}(\alpha)}(1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}).$$

b) Es sei $L > K$ der Zerfällungskörper von f. Dann operiert $\operatorname{Gal}(f) := \operatorname{Gal}_K(L)$ auf den Nullstellen von f. Das Bild dieser Operation ist eine eine Untergruppe von $\mathcal{A}_m$ dann und nur dann, wenn disc f ein Quadrat ist.

c) Berechne die Diskriminante von $x^q - 1$.

Aufgabe 2 (7 Punkte): Beweisen Sie den Satz von Stickelberger:
Es sei $K > \mathbb{Q}$ ein Zahlkörper und d_K die Körperdiskriminante. Zeigen Sie, dass

$$d_K \equiv 0, 1 \mod 4.$$

Hinweis: Ist $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis, so spalte die Determinante der Matrix $\left(\omega_i^{(j)}\right)$ in einen positiven Anteil P und einen negativen Anteil N auf, so dass $d_K = (P-N)^2 = (P+N)^2 - 4PN$ gilt. (Diese Zerlegung ist durch das Signum von $\mathcal{S}_n$ induziert.) Zeige, dass PN und $P+N$ rationale Zahlen sind, in dem man zeigt, dass alle Elemente der Galoisgruppe des Zerfällungskörpers trivial operieren.

Aufgabe 3 (6 Punkte):
Es sei α eine ganzalgebraische Zahl mit $[\mathbb{Q}(\alpha : \mathbb{Q})] = n$. Für alle Konjugierten von α gelte $|\alpha| = 1$. Dabei bezeichne $|\cdot|$ den gewöhnlichen komplexen Absolutbetrag.

a) Zeige, dass die Koeffizienten des normierten Minimalpolynoms von α in $\mathbb{Z}[x]$ im Absolutbetrag durch 2^n beschränkt sind.

b) Zeige, dass die Aussage aus a) auch für alle Potenzen α^k von α gilt ($k \in \mathbb{N}$).

c) Folgere aus b), dass die Menge der Potenzen von α endlich ist. Folglich ist α eine Einheitswurzel.

Zum Abschluß noch die Aufgabe der letzten Übung, deren Abgabe auf den 30.06.03 verschoben wurde:

Aufgabe 4 (11 Punkte):
Seien K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante d_K , p eine Primzahl und

$$\mathcal{A}_p := \{\alpha \in \mathcal{O}_K;\ \mathrm{N}(\alpha) \equiv 0 \mod p\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_p$ für jede Primzahl p, die d_K teilt, ein Primideal in K ist mit

$$\mathbf{N}(\mathcal{A}_p) = [\mathcal{O}_K : \mathcal{A}_p] = p.$$

b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass $\mathcal{A}_p$ für eine beliebige Primzahl p i.A. kein Ideal ist.

c) Ist $d_K = 2^\nu p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit ungeraden Primzahlen p_i, $\nu \geq 0$ und $\mathcal{A}$ wie in Übung 3, Aufgabe 3, gegeben, dann gilt:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2^\nu \cdot \mathcal{A}_{p_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_{p_r}.$$