LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 04. Juni 2003

4. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie

Abgabe: Montag, 16.06.2003, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte):

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{M}_1 := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n; \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \mod 2 \right\}$$

ein Gitter in $\mathbb{Q}$ ist und dass

$$\mathcal{M}_2 := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n; x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i \equiv 0 \mod 6 \right\}$$

ein Untermodul vom Rang $n-1$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ nach dem Elementarteilersatz.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

a) Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsbasis $(1, \omega)$. Dabei sei ω wie in Satz (2.7) gewählt. Bestimmen Sie die zu $(1, \omega)$ duale Basis und berechnen Sie die zugehörige Diskriminante.

b) Berechne $\mathcal{O}_K^*$ für $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$.

Aufgabe 3 (6 Punkte):
Sei K ein quadratischer Zahlkörper.

a) Sei $\mathcal{A}$ ein ganzes Ideal von K, so dass $\mathbf{N}(\mathcal{A}) = [\mathcal{O}_K : \mathcal{A}]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_K$.

b) Geben Sie ein Beispiel für K und $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_K$ an, so dass $\mathbf{N}(\mathcal{A}) = [\mathcal{O}_K : \mathcal{A}]$ keine Primzahl ist.

Aufgabe 4 (11 Punkte):
Seien K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante d_K , p eine Primzahl und

$$\mathcal{A}_p := \{\alpha \in \mathcal{O}_K; \mathrm{N}(\alpha) \equiv 0 \mod p\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_p$ für jede Primzahl p, die d_K teilt, ein Primideal in K ist mit

$$\mathbf{N}(\mathcal{A}_p) = [\mathcal{O}_K : \mathcal{A}_p] = p.$$

b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass $\mathcal{A}_p$ für eine beliebige Primzahl p i.A. kein Ideal ist.

c) Ist $d_K = 2^\nu p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit ungeraden Primzahlen p_i, $\nu \geq 0$ und $\mathcal{A}$ wie in Übung 3, Aufgabe 3, gegeben, dann gilt:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2^\nu \cdot \mathcal{A}_{p_1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}_{p_r}.$$