Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 28. Januar 2000

15. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 4.2.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Zeigen Sie direkt mit der Definition:
$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Für welche $a, b > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(1/|x|^b), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt 0 differenzierbar. Für welche dieser a, b ist die Ableitung f' in 0 stetig?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen, soweit sie existieren:
(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\,|x|$,
(2) $f_2 = \tanh$,
(3) $f_3 = \operatorname{artanh}$,
(4) $f_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{(x^x)} - (x^x)^x$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $I \setminus \{a\}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Ist f' in a stetig ergänzbar, so ist f in a differenzierbar. Gilt hier auch die Umkehrung?

Aufgabe 5 $(*)$ Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch $p_0(x) = 1$ und $p_{n+1}(x) = 2x^3 p_n(x) - x^2 p_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar mit $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)\exp(-1/x^2)$ für alle $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Organisatorisches: Es folgt noch eine kurze 16. Übung mit Abgabetermin Mittwoch, 9.2.2000