LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 5. November 1999

5. Übung zur Analysis I

Abgabe: Freitag, 12.11.1999, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte): Zeigen Sie: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): (1) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$(a)\quad \frac{(-1+4i)^2}{5-2i}, \qquad (b)\quad \frac{1-ib}{1+ai} + \frac{1+ib}{1-ai} \text{ für } a, b \in \mathbb{R},$$

$$(c)\quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

(2) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$(a)\quad \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, Im(z^3) > 0 \text{ und } 1 < \left|z^3\right| < 8 \right\},$$

$$(b)\quad \{ z \in \mathbb{C} \,|\, Re(1/z) = 1/r \}, \text{ wobei } r \in \mathbb{R} \text{ mit } r > 0 \text{ sei},$$

$$(c)\quad \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \right\}, \text{ wobei } a \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < 1 \text{ sei.}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $b\overline{b} > ac$ und

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, az\overline{z} + 2\mathrm{Re}(bz) + c = 0 \}.$$

Zeigen Sie: (1) Ist $a \neq 0$, so ist M ein Kreis in der komplexen Zahlenebene mit Mittelpunkt $-\overline{b}/a$. Welchen Radius hat M?
(2) Ist $a = 0$, so ist M eine Gerade in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Sind $A_1, A_2 \subset X$ mit $f(A_1) \subset f(A_2)$, so folgt $A_1 \subset A_2$.
(2) Sind $B_1, B_2 \subset Y$ mit $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, so folgt $B_1 \subset B_2$.
(3) Es gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$.
(4) Es gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$ für alle $B \subset Y$.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Seien X, Y nicht-leere Mengen. Charakterisieren Sie alle $G \subset X \times Y$, die als Graphen von Abbildungen $f : X \to Y$ auftreten.

Aufgabe 5 ($*$): Seien $n \in \mathbb{N}$ und $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Beweisen Sie

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2}.$$

Zeigen Sie ferner, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $z = 0$ oder $w = \lambda\overline{z}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.