Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, T. Dern, I. Klöcker

Aachen, den 15. Oktober 1999

2. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 25.10.1999, 15.30 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte): Seien A, B, C, D Mengen. Zeigen Sie:
(1) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$,
(2) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Zeigen Sie durch Induktion:
(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ ist $3^n > n^3 + 1$.
(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Zeigen Sie durch Induktion:
(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(2) Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^{(2^k)}) = \frac{1 - a^{(2^{n+1})}}{1 - a}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte): (1) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist $2^n\, n^2 < n!$?
(2) Seien m, $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Finden Sie geschlossene Darstellungen für

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2, \qquad\qquad \text{(b)} \qquad \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

und beweisen Sie diese durch Induktion.

Aufgabe 5 ($*$): Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einem Stapelplatz A sind n verschieden große Klötze nach Größe geordnet mit dem größten Klotz ganz unten aufgestapelt (Türme von Hanoi). Sie sollen auf einen Stapelplatz C befördert werden, als Zwischenlager steht ein Platz B zur Verfügung. In jedem Schritt kann der oberste Klotz eines Stapels auf einen anderen Stapel gelegt werden, wobei jedoch niemals ein größerer auf einem kleineren Klotz liegen darf.
Zeigen Sie durch Induktion nach n:
(1) Die Aufgabe kann in $2^n - 1$ Schritten erledigt werden.
(2) Es gibt keine Lösung, die mit weniger als $2^n - 1$ Schritten auskommt.