Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg Aachen, den 7. Januar 2000

Probeklausur zur Analysis I

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zeigen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$? Skizzieren Sie den Bereich!

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Sei $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$, M beschränkt und $\inf M > 0$. Zeigen Sie

$$\inf\{x^{-1} \mid x \in M\} = (\sup M)^{-1}.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Für $-1 \neq z \in \mathbb{C}$ sei $w = \frac{1-z}{1+z}$.
1) Zeigen Sie: $|z| < 1 \implies Re(w) > 0$.
2) Zeigen Sie: $Re(z) > 0 \implies |w| < 1$.
3) Zeigen Sie $w \neq -1$ und bestimmen Sie $\frac{1-w}{1+w}$.

Aufgabe 5: (5 Punkte)
Seien X, Y nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B) \quad \text{für alle } A, B \subset X.$$

Aufgabe 6: (5 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7: (2+3+3 Punkte)
1) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = 1$, indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass $\left|\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} - 1\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
2) Untersuchen Sie die Folge $\left(\frac{1-(1-\frac{1}{n})^3}{1-(1-\frac{1}{n})}\right)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
3) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \max\{1, a\}$.

Aufgabe 8: (5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^n$. Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und geben Sie explizit eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ an, die gegen $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe 9: (5 Punkte)
Sei $M = \{x^2 + x^{-1} \,|\, x \in \mathbb{R}, 1 \le x \le 2\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist.

Aufgabe 10: (3+2 Punkte)
1) Sei $(a_n)_{n\ge 1}$ eine reelle Folge, so dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergiert.
2) Bleibt die Aussage in 1) richtig, falls man statt absoluter Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nur Konvergenz fordert?

Aufgabe 11: (2+3 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{n^2}{3^n},$$ 2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Aufgabe 12: (2+2 Punkte)
1) Geben Sie die exakten Definitionen der beiden folgenden Begriffe:
   a) Häufungspunkt einer Folge,
   b) Supremum einer Menge.
2) Geben Sie die exakte Formulierung der beiden folgenden Sätze:
   a) Satz von Bolzano-Weierstraß (für Folgen in $\mathbb{C}$),
   b) Cauchy-Kriterium (für Reihen).