LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 29. November 2002

7. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 03.12.2002, 16.00 Uhr

Aufgabe 1(**Fourierkoeffizienten von Spitzenformen**)(5 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_n)$, so existiert ein $C > 0$ mit

$$|\alpha_f(T)| \leq C(\det T)^{k/2} \quad \text{für alle } T \in \Lambda_n, T \geq 0.$$

Aufgabe 2 (**Einschränkungen auf Diagonalblöcke**)(5 Punkte):
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, f eine Siegelsche Modulform vom Grad $n+m$ und Gewicht k, sowie $Z \in \mathcal{H}_n$ und $W \in \mathcal{H}_m$. Zeigen Sie:

a) Fixiert man W, so ist

$$Z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}\right)$$

eine Siegelsche Modulform vom Grad n und Gewicht k. Die Fourierkoeffizienten dieser Funktion als Funktionen in W sind Modulformen vom Grad m und Gewicht k. Analoges gilt natürlich auch für die Funktion

$$W \mapsto f\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}\right)$$

Wie kann man dies in einer Zeile einsehen?

b) Es existieren endlich viele Funktionen $g_1, \ldots, g_l \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ und $h_1, \ldots, h_l \in \mathcal{M}_k(\Gamma_m)$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{l} g_j(Z) h_j(W) \quad \text{für alle} \quad Z \in \mathcal{H}_n, W \in \mathcal{H}_m.$$

Aufgabe 3 (**Abschätzungen für Spitzenformen**)(5 Punkte):
Es sei $k > 0$, $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ und $\tilde{f}$ wie in II Lemma (1.8) der Vorlesung gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist Spitzenform

(ii) Es existieren positive reelle Zahlen γ_1 und γ_2 mit

$$|f(Z)| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2 \sigma(Y)} \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{F}_n.$$

(iii) Es existieren positive reelle Zahlen β_1 und β_2 mit

$$|f(Z)| \leq \beta_1 e^{-\beta_2 (\det Y)^{1/n}} \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{H}_n.$$

(iv) $\tilde{f}(Z)$ ist auf $\mathcal{H}_n$ beschränkt.

Aufgabe 4 (**Φ-Operator und Fourierkoeffizienten**)(5 Punkte):
Es seien $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ und $0 \leq j \leq n$. Zeigen Sie:

a) $f|\Phi^n = \alpha_f(0)$.

b) $f|\Phi^{n-j} = 0$ dann und nur dann, wenn $\alpha_f(T) = 0$ ist für alle $T \in \Lambda_n$ mit $\operatorname{Rang}(T) \leq j$.