LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 22. November 2002

6. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 26.11.2002, 16.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Modulformen zu Untergruppen**)(5 Punkte):
Definition: Es seien $n > 1$, $k \in \mathbb{Z}$ und Γ eine Untergruppe von Γ_n von endlichem Index m. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ ist eine Modulform vom Gewicht k zu Γ, wenn f holomorph ist und $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$ erfüllt.
Zeigen Sie unter diesen Voraussetzungen:

a) Durchläuft $M_1, \ldots, M_m$ ein irreduzibles Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von Γ in Γ_n, so ist

$$g = \prod_{j=1}^{m} f|_k M_j$$

eine Modulform vom Gewicht km zu Γ_n, welche nicht von der Wahl der Repräsentanten $M_1, \ldots, M_m$ abhängt.

b) Ist k negativ, so ist $f = 0$. Ist $k = 0$, so ist f konstant.

Aufgabe 2 (**Zweite Blockzeilen**)(10 Punkte):
Definition: Eine Matrix $M \in \mathbb{Z}^{(m,n)}$ mit $m \leq n$ heißt *primitiv*, wenn man sie zu einer Matrix in $\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$ ergänzen kann.

a) (C, D) ist eine zweite Blockzeile einer Matrix in Γ_n genau dann, wenn (C, D) primitiv ist und CD^{tr} symmetrisch ist.

b) Zu $R \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Q})$ existiert eine Matrix $M \in \Gamma_n$ mit $\mathrm{Rang}\, C = n$ und $R = C^{-1}D$.
Hinweis: Elementarteilergestalt zu R und a).

c) Sind M, $M' \in \Gamma_n$ Matrizen, die b) erfüllen, so gilt

$$\Gamma_{n,0}M' = \Gamma_{n,0}M.$$

Aufgabe 3 (**Absolut-gleichmäßige Summe**)(5 Punkte):
Zeigen Sie:

a) Für alle $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$, $S \geq 0$ gilt

$$\det(S) \leq \left(\frac{\mathrm{Sp}(S)}{n} \right)^n .$$

b) Die Reihe

$$\sum_{T \in \Lambda_n, T \geq 0} (\det T)^{\alpha} e^{\pi i \,\mathrm{Sp}(TZ)}$$

konvergiert für alle $\alpha \geq 0$ absolut gleichmäßig auf jedem Bereich $\mathrm{Im}(Z) \geq \delta E$, $\delta > 0$, in $\mathcal{H}_n$.

Hinweis: Bei b) schätze man die Anzahl der positiv-semidefiniten Matrizen $T \in \Lambda_n$ mit gegebener Spur ab und verwende a).

Aufgabe 4 (**Siegelsche Bereiche**)(5 Punkte):
Für $t > 0$ definieren wir einen Siegelbereich $Q'_n(t)$ vermöge

$$Q'_n(t) = \{Y \in \mathcal{P}_n; Y = D[B] \text{ genügt (i), (ii)}\},$$

wobei $D[B]$ die Jacobi-Zerlegung von Y ist und

(i) $d_i < t d_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$,

(ii) $|b_{ij}| < t$ für $1 \leq i < j \leq n$.

Zeigen Sie: Es existiert ein $t_0 > 0$ mit $\mathcal{R}_n \subset Q'_n(t)$ und

$$\left\{ P_Z \left[\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right]; Z \in \mathcal{F}_n \right\} \subset Q'_{2n}(t)$$

für alle $t \geq t_0$. Hierbei ist $W = (\delta_{n-i+1,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ und P die in der Aufgabe 2 Übung 2 definierte Abbildung.