LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 21. Oktober 2002

2. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Montag, 28.10.2002, 12.00 Uhr

Konvention: Verwenden wir eine Blockzerlegung $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ für ein $M \in \Sigma_n := \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$, so soll ohne weitere Bemerkung klar sein, dass die Matrizen A, B, C und D Matrizen der Größe $n \times n$ sind. Desweiteren sei $U^{-t} := (U^t)^{-1} = (U^{-1})^t$ für Matrizen $U \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$.

Aufgabe 1 (**Bild von** $\mathbb{H}_n$)(6 Punkte):
Sei $\mathbb{S}_n = \{M \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R}); M = M^t > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P : \mathbb{H}_n \to \mathbb{S}_n, \quad X + iY \mapsto P_Z = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{pmatrix} \right]$$

wohldefiniert und bijektiv ist, und weisen Sie für $M \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$ die Identitäten

(i) $P_{M<Z>} = P_Z[M^{-1}]$,

(ii) $(\mathrm{Im}\, M < Z >)^{-1} = P_Z \left[\begin{pmatrix} D^t \\ -C^t \end{pmatrix} \right]$,

(iii) $P_Z^{-1} = P_{-Z^{-1}} = P_Z[J]$

nach.

Aufgabe 2 (**Gruppenhomomorphismen**)(3 Punkte):
Wir erklären die Abbildungen

$$\times : \quad \Sigma_n \times \Sigma_m \to \Sigma_{n+m}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot} : \ \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \Sigma_n, \qquad \mathrm{rot}(U) = \begin{pmatrix} U^{-t} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{trans} : \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \to \Sigma_n, \qquad \mathrm{trans}(S) = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildungen injektive Gruppenhomomorphismen sind. Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit der Abbildung zu zeigen.

Aufgabe 3 (**Isomorphes Bild der unitären Gruppe**)(3 Punkte):
Zeigen Sie: $\mathcal{K}_n = \{M \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R});\ M < iE >= iE\}$ ist eine Untergruppe der $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$, welche zur unitären Gruppe $U_n = \left\{U \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C});\ U\overline{U}^t = E\right\}$ isomorph ist. Die Abbildung

$$\mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})/\mathcal{K}_n \to \mathbb{H}_n, \quad M\mathcal{K}_n \mapsto M < iE >,$$

ist eine Bijektion.

Hier noch einmal die Aufgaben 4 und 5 von Übung 1:

Aufgabe 4 (Grad einer Determinante)(4 Punkte):
Sei $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(\lambda) := \det(S + \lambda a a^t)$$

ein Polynom (in λ) von einem Grad kleiner gleich 1.

Aufgabe 5 (Zusammenhang zwischen Matrix und Diagonale)(4 Punkte):
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ und $S_D := \mathrm{diag}(s_{11}, \ldots, s_{nn})$ die Diagonale von S. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} S > 0 \quad &\Rightarrow \quad nS_D > S, \\ S \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad nS_D \geq S. \end{aligned}$$

Gilt dies auch für $n = 1$?