LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 30. Januar 2003

13. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Donnerstag, 06.02.2003, 12.00 Uhr

Bemerkung: Ziel dieser Übung ist die Konvergenz der Reihe aus Aufgabe 4 zu zeigen. Dafür benötigen wir zuerst weitere Integrale.

Aufgabe 1(Konvergenz von $\eta_k(Z)$**)**(5 Punkte):
Seien $Z = X + iY \in \mathcal{H}_n$ und $k > n$. Dann existiert das Integral

$$\eta_k(Z) := \int_{\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})} |\det(Z+S)|^{-k} dS$$

und erfüllt

$$\eta_k(Z) = (\det Y)^{(n+1)/2-k} \eta_k(iE).$$

Aufgabe 2 (Konvergenz von $\sigma(Z)$**)**(5 Punkte):
Für $k > n$ existiert eine Konstante α, die nur von n und k abhängt, so dass

$$\sigma(Z) := \int_{\mathcal{H}_n} (\det \mathrm{Im}\, W)^k |\det(W+Z)|^{-2k} d\nu(W) = \alpha(\det Y)^{-k}$$

für alle $Z = X + iY \in \mathcal{H}_n$ gilt.

Aufgabe 3 (Abschätzung)(5 Punkte):
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $Z \in \mathcal{H}_n$ und alle $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ mit $S^2 \leq \varepsilon^{-2} E$

$$c^{-1} |\det Z| \leq |\det(Z+S)| \leq c |\det Z|$$

mit $c = 2^{n/2}(1 + \varepsilon^{-1}\,\mathrm{Sp}(Y^{-1}))^n$.

Hinweis: Zeige zunächst $|\det Z|^2 = \det(Y) \cdot \det(Y + Y^{-1}[X])$ und schätze $Y + Y^{-1}[X]$ nach oben ab z.B. durch $2(1 + \varepsilon^{-2}\,\mathrm{Sp}(Y^{-1})^2)(Y + Y^{-1}[X])$.

Aufgabe 4 (Konvergenz der Reihe)(5 Punkte):
Für $k > n$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z})} |\det(Z+S)|^{-k}, \quad Z \in \mathcal{H}_n.$$

Genauer gibt es für $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c = c(n,\varepsilon) > 0$, so dass

$$c^{-k} \cdot \eta_k(Z) \leq \sum_{S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z})} |\det(Z+S)|^{-k} \leq c^k \cdot \eta_k(Z)$$

für alle $Z = X + iY \in \mathcal{H}$ gilt mit $Y \geq \varepsilon E$.

Hinweis: Für ein Fundamentalparallelotop $\mathcal{C}_n$ des Gitters $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z})$ bringe man zunächst

$$\int_{\mathcal{C}_n} |\det(Z+S+H)|^{-k} dH$$

in Beziehung zu $|\det(Z+S)|^{-k}$.