LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 09. Januar 2003

11. Übung Siegelsche Modulformen

Abgabe: Dienstag, 14.01.2003, 16.00 Uhr

Organisatorisches: Die Aufgaben dieser Übung sind auf 2 Wochen ausgelegt. Die Aufgaben 1 und 2 sind bis zum Dienstag, den 14.01.03 abzugeben, die Aufgaben 3 und 4 können noch eine Woche später abgegeben werden.

In der Vorlesung hatte wir bereits den folgenden

(2.9) Satz Sei $S \in \mathcal{P}_m$ gerade von der Stufe q, d.h.

$$q = \min\{l \in \mathbb{N}; lS^{-1} \text{ gerade }\}.$$

Dann ist $\theta(Z,S)$ eine Siegelsche Modulform vom Grad n und Gewicht $\frac{m}{2}$ zu $\Gamma_{n,0}(q)$, d.h. für $M \in \Gamma_{n,0}(q)$ gilt

$$\theta(M < Z >, S) = \nu_S^n(M)\,(\det(CZ+D))^{m/2}\,\theta(Z,S) \quad \text{mit} \quad \nu_S^n(M)^8 = 1.$$

Wir möchten nun den Multiplikator $\nu_S^n(M)$ genauer bestimmen und zeigen, dass es sich um einen Dirichletschen Charakter handelt. Dazu benötigen wir erst einmal die folgende

Definition 1 Die Voraussetzungen seien wie im obigen Satz.

a) Für $Q \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{Q})$ sei die Gaußsche Summe definiert als

$$G(Q,S) = d^{-mn} \sum_{L \in \mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})} e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[L]Q)}$$

mit einer Zahl $d \in \mathbb{N}$, so dass dQ ganz ist.

b) Sei $D \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{Z})$, $\det D \neq 0$, $DQ \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{Z})$. Dann ist die verallgemeinerte Gaussche Summe definiert als

$$G_D(Q,S) = |\det D|^{-m} \sum_{L \in \mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})/\mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})D} e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[L]Q)}.$$

Aufgabe 1(**Eigenschaften dieser Gaußschen Summe**)(8 Punkte)
Zeigen Sie für $M \in \Gamma_n$ mit $\det D \neq 0$:

a) Beide Definitionen sind unabhängig von der Wahl von d bzw. D und $G_D(Q,S)$ ist eine Verallgemeinerung von $G(Q,S)$.

b) Die Abbildungen

$$\mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})/\mathrm{Mat}(m\times n);\mathbb{Z})D^{tr} \to \mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})/\mathrm{Mat}(m\times n);\mathbb{Z})D, \quad L \mapsto LB$$

und

$$\mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})/\mathrm{Mat}(m\times n);\mathbb{Z})D \to \mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z})/\mathrm{Mat}(m\times n);\mathbb{Z})D^{tr}, \quad L \mapsto LC^{tr}$$

sind Bijektionen. (Dies kann man z.B. erreichen, indem man zeigt, dass BC^{tr} und $C^{tr}B$ Automorphismen sind.)

c)
$$G(BD^{-1},S)=G(-D^{-1}C,S).$$

Aufgabe 2 (**Der Multiplikator als Gaußsche Summe**)(12 Punkte):
Sei $M\in\Gamma_{n,0}(q)$.

a) Man gebe $\nu_S^n(M)$ explizit für $q=1$ an.

b) Zeige mit Hilfe der Thetatransformationsformel
$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{mn/2}\det(i\lambda C+D)^{-m/2}\theta(M<i\lambda E>,S)=\nu_S^n(M)(\det S)^{-n/2}.$$

c) Man bestimme R, so dass Folgendes gilt:
$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & R\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D^{-t} & 0\\ C & D\end{pmatrix}.$$

d) Zerlege $M<Z>=W+R$ und zeige dann ($d=\det D$)
$$\theta(M<Z>,S)=\sum_{L\in\mathrm{Mat}(m\times n;\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})}e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[L]R)}\theta_{\frac{L}{d},0}(W,d^2S).$$

e) Berechne nun den Grenzwert aus a) mit Hilfe dieser Formel und der Thetatransformationsformel erneut und zeige so
$$\nu_S^n(M)=(\det D)^{-m/2}|\det D|^m G(-D^{-1}C,S).$$

f) Man zeige, dass $\nu_S^n:\Gamma_{n,0}(q)\to\mathbb{C}^*$ die folgende Produktregel erfüllt:
$$\nu_S^n(M_1M_2)=\nu_S^n(M_1)\nu_S^n(M_2)\quad\text{für}\quad M_1,M_2\in\Gamma_{n,0}(q).$$

Für unser weiteres Vorgehen benötigen wir noch die folgende

Definition 2 Sei $\mathcal{K}$ die Untergruppe von $\Gamma_{n,0}(q)$, die von den folgenden Matrizen erzeugt wird:
$$\mathrm{rot}(V),\ V\in\mathrm{SL}(n;\mathbb{Z})\quad \mathrm{trans}(S),\ S\in\mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z}),\quad \mathrm{trans}(S)^t,\ S\in q\,\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z}).$$
und das folgende Lemma.

Aufgabe 3 (**Vertreter von Doppelnebenklassen**)(5 Punkte):
Man zeige, dass folgende

Lemma 1 Jede Doppelnebenklasse $\mathcal{K}M\mathcal{K}$ mit $M\in\Gamma_{n,0}(q)$ enthält eine Matrix der Form
$$M_0=E\times\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_{1,0}(q)\quad\text{und}\quad\delta\equiv\det D\mod q.$$

Aufgabe 4 (**Der Multiplikator als Dirichletscher Charakter**)(15 Punkte):
Man zeige für $m = 2k$:

a) ν_S^n ist auf den Doppelnebenklassen $\mathcal{K}M\mathcal{K}$, $M \in \Gamma_{n,0}(q)$ konstant.

b) Mit den Bezeichnungen wie im Lemma gilt

$$\nu_S^n(M) = \nu_S^1\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right).$$

c)

$$\nu_S^1\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{Q}_{|\delta|} := \mathbb{Q}(e^{2\pi i \delta^{-1}}).$$

d)

$$\nu_S^1\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{Q}_{|\delta+b\gamma|} \quad \text{für alle } b \in \mathbb{Z}.$$

e)

$$\nu_S^1 \in \mathbb{Q}.$$

f)

$$\nu_S^1\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = \delta^{-k} \sum_{l \in \mathrm{Mat}(m\times 1;\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z})} e^{\pi i\, \mathrm{Sp}(\delta^{-1}S[l])} =: \nu_S(\delta).$$

g) ν_S^1 ist ein Dirichletscher Charakter modulo q.

h) Für eine ungerade Primzahl p (ab jetzt immer) gilt für geeignete $a_i \in \mathbb{Z}$

$$\nu_S(p) = p^{-k} G_p(a_1) \cdot \ldots \cdot G_p(a_m),$$

wobei $G_p(a) := \sum_{l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} e^{2\pi i a l^2/p}$.
Hinweis: Benutze ohne Beweis: Zu S existiert eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{Z})$ mit $p \nmid \det M$, so dass

$$\frac{1}{2} S[MX] \equiv a_1 x_1^2 + \ldots + a_m x_m^2 \mod p.$$

Was gilt dann für $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m \mod p$?

i)

$$G_p(a) = \left(\frac{a}{p}\right) G_p(1) \quad \text{und} \quad G_p(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p,$$

wobei $\left(\frac{*}{p}\right)$ das Legendre-Symbol ist.

j)

$$\nu_S(p) = \left(\frac{(-1)^k \det S}{p}\right).$$

k) Damit haben wir das folgende Ergebnis gezeigt (noch zu begründen)

Theorem Sei $S \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{Q})$, $m = 2k$ eine gerade, positive definite Matrix der Stufe $q > 1$. Dann ist $\nu_S^n(M) = \nu_S(\det D)$ ein Dirichletscher Charakter modulo q, der $\nu_S(-1) = (-1)^k$ und $\nu_S(p) = \left(\frac{(-1)^k \det S}{p}\right)$ für ungerade Primzahlen mit $p \not| q$ erfüllt sowie

$$\nu_S(2) = 2^{-k} \sum_{l \in \mathrm{Mat}(m \times 1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} e^{\pi i S[l]/2}$$

für q ungerade.

Bemerkung: Das Ergebnis kann in ähnlicher Weise auch für m ungerade gezeigt werden und auch auf die Thetareihen $\theta_{P,Q}(Z, S)$ erweitert werden.