LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 18. November 2002

5. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: Dienstag, den 26.11. 2002, bis 14.00 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Übung entfällt: Am Montag, dem 25. November entfällt die Übung und die Hausaufgaben können deshalb bis zum Dienstag abgegeben werden. Am 2. Dezember findet die Übung wieder regulär statt.

Beweisnot? Alle Antworten sind mit Beweisen zu belegen, außer es handelt sich um eine Formulierung wie „Nennen Sie ein Beispiel“, „Geben sie ein Beispiel an“ oder „Was ist ...“. Auch bei „Bestimmen Sie“ und „Berechnen Sie“ ist ein Beweis verlangt. Bei der Zeichenaufgabe gilt das Gegenteil: Hier ist im Normalfall nichts zu beweisen.

Aufgabe 19 (Fixpunkte und -geraden) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, M in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ und q in $\mathbb{K}^2$. Dann definiert

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ x & \longmapsto Mx+q \end{cases}$$

nach Aufgabe 8 einen Automorphismus φ von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

a) Zeigen Sie, unter welchen Bedingungen an M und q es

(i) genau einen Fixpunkt von φ gibt?

(ii) mehr als einen Fixpunkt von φ gibt?

(iii) keinen Fixpunkt von φ gibt?

b) Zeigen sie, für welche $a, v \in \mathbb{K}^2$, $v \neq 0$ die Gerade $G_{a,v}$ eine Fixgerade von φ ist?

c) Finden sie ein Beispiel ($\mathbb{K}$, M und q), bei dem φ weder Fixpunkte noch Fixgeraden besitzt.

d) Finden Sie ein Bespiel, bei dem es unendlich viele Fixpunkte gibt, φ aber von der Identität verschieden ist.

Aufgabe 20 (DESARGUES-Ebenen) Beweisen sie, dass jede affine Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ zu beliebigem Körper $\mathbb{K}$ eine DESARGUES-Ebene ist.

Aufgabe 21 (MOULTON, die 3.) Zeigen Sie anhand eines konkreten Beispiels, dass die MOULTON-Ebene keine DESARGUES-Ebene ist.

Aufgabe 22 (Zeichenaufgabe: Kleiner Satz von Desargues) a) Seien F, G und H parallele Geraden in $A_2(\mathbb{R})$, sowie $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$ mit $a \vee b || a' \vee b'$ und $b \vee c || b' \vee c'$. Illustrieren Sie mit GEONE$_X$T, dass dann $a \vee c || a' \vee c'$ folgt.

b) Gilt auch $a \vee c || a' \vee c'$ auch im Fall, dass sich F, G und H in genau einem Punkt schneiden? Bilden Sie sich mit mit Hilfe von GEONE$_X$T eine Meinung dazu.

c) Sind F, G und H wieder parallele Geraden in $A_2(\mathbb{R})$, und weiter $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$. Angenommen, es gibt die drei Schnittpunkte $s_1 := (a \vee b) \wedge (a' \vee b')$, $s_2 := (b \vee c) \wedge (b' \vee c')$ und $s_3 := (c \vee a) \wedge (c' \vee a')$, was können sie über deren Lage mit Hilfe von GEONE$_X$T vermuten?

Schicken Sie ein Email mit ihren Vermutungen und den zugehörigen Zeichnungen via Email an sebastian.mayer@mathA.rwth-aachen.de (oder geben Sie Ausdrucke ihrer Zeichnungen inclusive ihrer Vermutung und der Konstruktionsprotokolle ab).