LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 11. November 2002

4. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 18. 11. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Aufgabe 14 (affine Koordinatenebene) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{A}_2(\mathbb{K}) = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ seine zugehörige affine Koordinatenebene, weiter $\mathsf{o} = \binom{0}{0}$ der Nullpunkt. Zeigen Sie:

a) Die Addition auf $\mathbb{P}$ bezüglich o ist die gewöhnliche Vektoraddition auf $\mathbb{K}^2$.

b) Die Menge der Multiplikatoren $K(\mathbb{A})$ ist isomorph zu $\mathbb{K}$.
Hinweis: Nach Aufgabe 10 ist $\operatorname{Dilat}\mathbb{A} = \{x \mapsto \lambda x + q \,|\, x \in \mathbb{P}, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{P}\}$

Aufgabe 15 (Affin isomorphe Ebenen) Seien $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ und $\mathbb{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ zwei affine Ebenen und $\Phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ ein affiner Isomorphismus zwischen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$. Zeigen Sie:

a) Ist α ein Automorphismus von $\mathbb{A}$, so ist $\alpha' := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ eine Automorphismus von $\mathbb{A}'$.

(i) Ist p ein Fixpunkt von α, so ist $\Phi(p)$ ein Fixpunkt von α'.

(ii) Ist G eine Fixgerade von α, so ist $\Phi(G)$ eine Fixgerade von α'.

b) Ist α eine Dilatation von $\mathbb{A}$, so ist $\alpha' := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ eine Dilatation von $\mathbb{A}'$. Folgern Sie, dass $\operatorname{Dilat}\mathbb{A} = \Phi^{-1}(\operatorname{Dilat}\mathbb{A}')\Phi := \{\Phi^{-1} \circ \alpha' \circ \Phi \,|\, \alpha' \in \operatorname{Dilat}\mathbb{A}'\}$ gilt.

c) Ist α eine Translation von $\mathbb{A}$, so ist $\alpha' := \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}$ eine Translation von $\mathbb{A}'$.

d) Ist $\mathbb{A}$ eine Translationsebene, so auch $\mathbb{A}'$.

Führen sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Achten Sie auf formal korrekte Aussagen.

Aufgabe 16 (Kleiner Satz von Pappus, vgl. Aufgabe 18) Beweisen Sie den kleinen Satz von Pappus:
Sei $\mathbb{A}$ eine Translationsebene. Gegeben seien zwei verschiedene, parallele Geraden F und G sowie paarweise verschiedene Punkte $a, c, a', c' \in F$ und $b, d, b', d' \in G$. Aus $a \vee b || a' \vee b'$, $b \vee c || b' \vee c'$ und $c \vee d || c' \vee d'$ folgt $a \vee d || a' \vee d'$.

Aufgabe 17 (Kleiner Scherensatz, vgl. Aufgabe 18) Beweisen Sie den kleinen Scherensatz:
Sei $\mathbb{A}$ eine Translationsebene. Gegeben seien zwei verschiedene, parallele Geraden F und G sowie Punkte $a, a', a'' \in F$ und $b, b', b'' \in G$. Aus $a \vee b' || a' \vee b''$ und $a' \vee b || a'' \vee b'$ folgt $a \vee b || a'' \vee b''$.

Aufgabe 18 (Zeichenaufgabe) a) Überprüfen Sie mit GEONE$_X$T den kleinen Satz von Pappus $(*)$.

b) Überprüfen Sie mit GEONE$_X$T den kleinen Scherensatz $(*)$.

c) Gilt ein Analogon des kleinen Scherensatzes im Fall $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ auch noch, wenn sich F und G schneiden? $(*)$

$(*)$: Fertigen Sie jeweils Zeichnungen mit GEONE$_X$T an und senden Sie diese per Email an sebastian.mayer@mathA.rwth-aachen.de (oder drucken Sie sie aus und geben Sie sie mit den Konstruktionsprotokollen (Menu: Zeichenfläche) ab). Beweisen brauchen Sie nichts.