LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 4. November 2002

3. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 11. 11. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Aufgabe 10 (Dilatationen von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ die affine Koordinatenebene zu $\mathbb{K}$.

a) Zeigen Sie: Für alle $q \in \mathbb{K}^2$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ definiert $x \mapsto \lambda x + q$ eine Dilatation $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

b) Bestimmen Sie alle Dilatationen von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

c) Bestimmen Sie alle Translationen von $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$.

Aufgabe 11 (Translationen der MOULTON-Ebene) Zeigen Sie:

a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x + \binom{\alpha}{0}$ eine Translation der MOULTON-Ebene.

b) Angenommen, es gibt eine Translation $\tilde{\tau}$ mit $\tilde{\tau}(0) = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ und $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie:

   b1) Dann gibt es auch eine Translation τ mit $\tau(0) = \binom{0}{\gamma}$.

   b2) Was sind die Fixgeraden von τ?

   b3) Zeige: Für alle $\binom{\sigma}{0}$ ist $\tau(\binom{\sigma}{0}) = \binom{\sigma}{\gamma}$. Dazu ist mindestens 1 Teilaufgabe davor hilfreich.

c) Zeigen Sie: $\tau(x) = x + \binom{0}{\gamma}$ für alle x und τ aus Aufgabenteil b).

   Hinweis: Wählen sie die verwendeten Hilfsgeraden so, dass sie negative Steigung haben.

d) Folgern Sie, dass τ keine Translation ist.

e) Bestimmen sie $\operatorname{Trans}\mathbb{A}$.

Aufgabe 12 (Translationen und Basispunkte) Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene und o und o' seien zwei Punkte in $\mathbb{P}$. Definiere

$$G := \{\tau_a \mid a \in \mathbb{P}, \tau_a \text{ ist die Translation mit } \tau_a(\mathsf{o}) = a\}$$

und

$$G' := \{\tau'_a \mid a \in \mathbb{P}, \tau_a \text{ ist die Translation mit } \tau'_a(\mathsf{o}') = a\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ mit der von G induzierten Addition $a + b = \tau_a \circ \tau_b(\mathsf{o})$ isomorph zu $\mathbb{P}$ mit der von G' induzierten Addition $a +' b = \tau'_a \circ \tau'_b(\mathsf{o}')$ ist und geben Sie den Gruppenisomorphismus an. Achten Sie bitte auf einen gründlichen Beweis. Sie dürfen Aussagen der Algebra und Lineare Algebra natürlich unbewiesen verwenden.

Aufgabe 13 (Zeichenaufgabe) Die Bearbeitungszeit dieser Aufgabe ist 1 Woche.

a) Veranschaulichen Sie den Parallelogramm-Satz der Vorlesung im Fall $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ durch 2 Bilder mit GEONExT, je einem Bild für beide Richtungen i) $\Rightarrow$ ii) und ii) $\Rightarrow$ i). Achten Sie dabei darauf, dass die Konstruktion auch bei Variation der gewählten Punkte gültig bleibt.

b) Geben Sie Ihre Lösung ab: Wahlweise als Email an sebastian.mayer@mathA.rwth-aachen.de oder als Ausdruck des Bildes sowie eines Ausdrucks des Konstruktionsprotokolls von GEONExT. Die empfohlene Variante ist die Abgabe via Email.