LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 28. Oktober 2002

2. Übung zu Ebene Geometrie

Abgabe: 4. 11. 2002, bis 16.10 Uhr im Kasten vor Raum HG 155 oder zu Übungsbeginn beim Übungsleiter

Aufgabe 6 (Affine Ebene der Ordnung 2) Zeigen Sie, dass alle affinen Ebenen der Ordnung 2 affin isomorph zur affinen Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(K)$ mit $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sind. Beweisen Sie weiter, dass für jede affine Ebene $\mathbb{A}$ der Ordnung 2 die Menge $\operatorname{Aut}\mathbb{A}$ isomorph zur Permutationsgruppe S_4 ist.

Aufgabe 7 (2-Blockpläne) Sei S eine endliche Menge, $\mathcal{B} \subset 2^S$ eine Teilmenge der Potenzmenge von S. Das Paar $(S, \mathcal{B})$ heißt 2-Blockplan, falls:

- Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $|B| = k$ für alle $B \in \mathcal{B}$, und:
- Jede 2-elementige Teilmenge von S ist in einem $B \in \mathcal{B}$ enthalten.

a) Zeigen Sie, dass jede endliche affine Ebene ein 2-Blockplan ist. Welche Einschränkungen an $|S|$ und k gibt es? Welche „konkreten“ Beispiele können Sie (mit Hilfe der Vorlesung) angeben?

b) Lotto 7 aus 49:[1] Sie wollen sicher gehen, dass Sie mindestens einen Zweier erhalten. Finden Sie eine nichttriviale Lösung mit Hilfe von Teilaufgabe a). Können Sie eine bessere Lösung angeben, die mit weniger Lottoscheinen auskommt?

Aufgabe 8 (Affine Automorphismen) a) Sei K ein Körper und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ein Körperautomorphismus von K. Definiere nun für $a = \binom{a_1}{a_2} \in K^2$ komponentenweise $\bar{a} := \binom{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}$. Seien $M \in \mathrm{GL}(2;K)$ und $q \in K^2$. Zeigen Sie, dass $\varphi : K^2 \to K^2, x \mapsto M\bar{x} + q$ ein Automorphismus von $\mathbb{A}_2(K)$ mit $\varphi(G_{a,y}) = G_{\varphi(a),M\bar{y}}$ ist.

b) Für welche $q \in \mathbb{R}^2$ ist $x \mapsto x + q$ ein affiner Automorphismus der Moulton-Ebene?

Aufgabe 9 Sei $\mathbb{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_2 \geq 0\}$ die *obere Halbebene*[2] und

$$\mathbb{G} = \left\{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{P} : (x_1 - \mu)^2 + x_2^2 = \rho^2\} : \mu, \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0\right\} \cup \{\{(\mu, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\} : \mu \in \mathbb{R}\}$$

Welche der Inzidenzaxiome (I.1) bis (I.4) erfüllt $\mathbb{P}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Beachten Sie, dass Sie evtl. noch die Zeichenaufgabe vom ersten Blatt abgeben sollten.

[1] Sie kreuzen je 7 verschiedene Zahlen von 1 bis 49 auf ihren Lottoscheinen an. Dann werden 7 Zahlen gezogen. Ein Zweier ist eine 7-elementige Teilmenge Z von $\{1, \ldots 49\}$, die mit dem gezogenen amtlichen Lottozahlen (wieder 7 verschiedene Zahlen) mindestens 2 Zahlen gemein hat.

[2] Meist wird $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ als obere Halbebene bezeichnet.