LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 11. Februar 2003

16. Übung zur Analysis III

Abgabe: Montag, 31. März 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweise: Diese Übung wird am Freitag, dem 11. April 2003, um 10:00 Uhr in Hörsaal IV vorgerechnet.
Die Punkte dieser Übung zählen nicht zur Gesamtpunktzahl, bei Bearbeitung werden Ihnen die Punkte aber gutgeschrieben.
Die Diskussionsstunde von Marc Ensenbach vom 13. Februar fällt aus, Ersatztermin ist der 18. Februar, 14:00 Uhr, Hörsaal VT.
Klausuren: Die 2. Klausur findet statt am 24. Februar um 17:15 Uhr. Studierende mit Matrikelnummern bis 233999 schreiben im Grünen Hörsaal, die anderen im Roten Hörsaal. Die Rückgabe der Klausur ist am Freitag, 28. Februar, um 9:00 Uhr in Hörsaal IV.
Die 3. Klausur findet statt am 17. April um 11:15 Uhr. Die Hörsaalverteilung wird noch bekanntgegeben.
Vor der Vordiplomsklausur Analysis I/II am 5. März und vor der dritten Klausur zur Analysis III wird es jeweils zwei Diskussionsstunden geben: 27. Februar, 14:00 Uhr und 28. Februar, 10:00 Uhr, sowie am 9. und 10. April, jeweils um 10:00 Uhr. Alle Diskussionsstunden finden in Hörsaal IV statt.
Klausurinhalte: Die 2. Klausur geht über den Stoff der Kapitel XIII bis XV.1 einschließlich sowie der Übungen 7 bis 15. Die 3. Klausur behandelt den Stoff des 3. Semesters.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Berechnen Sie für die Fläche

$$F := \{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3; x_3 = x_1x_2,\, 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 4,\, x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0\}$$

das Integral

$$\int_F \frac{6x_3}{x_1^2+x_2^2}\, dS(x).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Gegeben sei eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ mit der Karte

$$\varphi : (0,1)\times(-1,1) \to M, \quad (u,v) \mapsto (u,v,u^2/2)^t.$$

Weiter sei die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := xy^2$. Berechnen Sie $\int\limits_M f\, dS_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sei die Karte

$$\varphi : (r,R)\times(0,H) \to \mathbb{R}^3, \quad 0 < r < R < \infty, H > 0,$$

durch

$$\varphi(t_1,t_2) = (t_1\cos t_2, t_1 \sin t_2, ht_2)^t,\, h > 0.$$

Berechnen Sie die Fläche der 2–dimensionalen Untermannigfaltigkeit, die durch diese Karte beschrieben wird. (Bemerkung: Dies ist eine so genannte Wendelfläche.)

Aufgabe 4 (3 Punkte) Es sei A die bzgl. der Polarkoordinaten (φ, θ) auf der Einheitssphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ durch die Ungleichungen

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

beschriebene Teilmenge mit $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Berechnen Sie ihre Fläche.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Berechnen Sie die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1\}, \quad a,b > 0.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Sei M eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine integrierbare Teilmenge. Sei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto a + Tx$$

eine längentreue Abbildung ($a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in O(n)$ eine orthogonale Matrix). Zeigen Sie, dass $F(A)$ eine integrierbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist mit

$$\mathrm{vol}_k(F(A)) = \mathrm{vol}_k(A).$$