LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 28. Januar 2003

14. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 6. Februar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Gegeben sei eine lineare Abbildung $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in Form einer positiv definiten $n\times n$–Matrix.

a) Zeigen Sie für $\gamma > 0$:

$$\mathrm{vol}(\{x\in\mathbb{R}^n; x^tSx \le \gamma^2\}) = \mathrm{vol}(\{x\in\mathbb{R}^n; \lambda_1 x_1^2+\ldots+\lambda_n x_n^2 \le \gamma^2\}),$$

wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die Eigenwerte von S sind.

b) Berechnen Sie $\mathrm{vol}\{x\in\mathbb{R}^n; x^tSx\le\gamma^2\}$.

Bemerkung. Man nennt diese Menge einen *Ellipsoiden*.

Hinweis zur Bearbeitung von Aufgabe 2 und 3. Im Allgemeinen ist der Integrationsbereich nicht exakt der Bild- oder Urbildbereich der verwendeten Diffeomorphismen. Dies macht bei der Integration in vielen Fällen keinen Unterschied. Begründen Sie dies in Aufgabe 2 *ausführlich*, in Aufgabe 3 (und allen weiteren Aufgaben, sofern nichts anderes angegeben ist) reicht eine *kurze* Begründung.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie mittels der Transformationsformel und des Diffeomorphismus Φ der Polarkoordinaten das folgende Integral:

$$\int_K \sqrt{x^2+y^2}\, d\lambda_2,$$

wobei $K := \{(x,y)^t\in\mathbb{R}^2; 1\le x^2+y^2\le 4\}$.

Aufgabe 3 (3+3+2+2+3+3 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_M \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\, d\lambda_3$, $M=\{(x,y,z)^t\in\mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1\}$, $a, b, c > 0$.

b) $\displaystyle\int_M x^2y\, d\lambda_3$, $M=\{(x,y,z)^t\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

c) $\displaystyle\int_M |x|(1-x^2-(y-1)^2)\, d\lambda_2$, $M=\{(x,y)^t\in\mathbb{R}^2; y\ge x+1,\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$.

d) $\displaystyle\int_M |x|\, d\lambda_3$, $M=\{(x,y,z)^t\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z\le 2y,\ y\ge x+1,\ z\ge 0\}$.

e) $\displaystyle\int_M x_3x_4^3\, d\lambda_4$, $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^t\in\mathbb{R}^4; 0\le x_4\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\le 1\}$.

f) $\displaystyle\int_M 1\, d\lambda_3$, $M=\{(x,y,z)^t\in\mathbb{R}^3; 0\le x+y\le 4-(x-y)^2,\ x^2+y^2\le z\le 2(1+x+y)\}$.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1}; \|x\|_2 < 1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ mit

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{n-1},r) = (rx_1,\ldots,rx_{n-1},r\sqrt{1-\|x\|_2^2})$$

ein Diffeomorphismus ist.

b) Berechnen Sie $\det D\Phi$.