LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 21. Januar 2003

13. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 30. Januar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis: Die 2. Klausur zur Analysis III findet am 24. 02. 2003 um 17:15 Uhr im Grünen und Roten Hörsaal statt. Die 3. Klausur zur Analysis III findet am 17. 04. 2003 um 11:15 Uhr ebenfalls im Grünen und Roten Hörsaal statt.
Ab sofort können Sie sich für beide Klausuren anmelden, und zwar entweder per E-Mail an ana3ws02k2@mathA.rwth-aachen.de (2. Klausur) bzw. ana3ws02k3@mathA.rwth-aachen.de (3. Klausur) (bitte geben Sie Namen und Matrikelnummer an) oder durch Eintragen in die im Sekretariat ausliegenden Listen.

Aufgabe 1 (4+4+5* Punkte)

a) Seien $r,R \in \mathbb{R}$ mit $R \geq r \geq 0$. Berechnen Sie das Volumen des Torus mit den Radien r und R, also desjenigen Körpers, der durch Rotation der Menge

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+(y-R)^2} \leq r \right\}$$

um die x-Achse entsteht.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1\} \quad \text{und} \quad Z_2 = \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3;\ y^2+z^2 \leq 1\}.$$

c) Sei $p \geq 1$. Berechnen Sie mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips das Volumen der "Einheitskugel"

$$E := \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\|_p \leq 1\} = \{(x_1,x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2;\ |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$$

(ausgedrückt durch Werte der Gammafunktion). Geben Sie für die Fälle $p=1$ und $p=2$ explizite Formeln (ohne Gammafunktion) an.
Erinnerung: Für $p \geq 1$ gilt

$$B(\tfrac{1}{p}, 1+\tfrac{1}{p}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(1+\frac{1}{p})}{\Gamma(1+\frac{2}{p})}.$$

Aufgabe 2 (3+3+2 Punkte) Sei $D := (-1,1)$, $M := [0,1]$ und sei $f : D \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & x \in D, t = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{t}+|x|} & x \in D, 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Sei $F : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt$.

a) Zeigen Sie, dass F stetig ist, ohne $F(x)$ explizit zu berechnen.

b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in D$ und begründen Sie so die Stetigkeit von F.

c) Untersuchen Sie F auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

Aufgabe 3 ((1+3)+(2+3)+(3+2) Punkte)
Begründen Sie exakt, warum die folgenden Lebesgue-Integrale existieren, und berechnen Sie sie.

a) $\displaystyle\int_{[0,\pi]^2} y \sin|x-y| \, d\lambda_2.$

b) $\displaystyle\int_M y e^{x/y} \, d\lambda_2$ mit $M := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2;\ |x| < y < a\}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

c) $\displaystyle\int_{[1,\infty)^3} f(x,y,z) \, d\lambda_3$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{cases} z & x = y, \\ 1 & z = 1,\, x \neq y, \\ 2xyz\, e^{-x^2-y^2-z^2+3} & \text{sonst.} \end{cases}$$