LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 7. Januar 2003

11. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 16. Januar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Proposition 1 Sei A eine nichtleere abgeschlossene Menge reeller Zahlen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = f$.

Sie dürfen diese Proposition ohne Beweis zum Lösen der folgenden beiden Aufgaben verwenden.

Aufgabe 1 (5 Punkte) **(Vorstufe zum Satz von Lusin)**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $m \in \mathbb{N}$ und $\{A_1, \ldots, A_m\}$ eine Zerlegung von I in messbare, paarweise disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sei weiterhin $f : I \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit der Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{A_k}$$

mit $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie mit Hilfe von Proposition 1, dass dann für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda(\{x \in I;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte) **(Satz von Lusin)**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, endliches Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(\{x \in I;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1, den Satz von EGOROFF (Übung 9, Aufgabe 3) und Proposition 1.

Definition: Für messbare $M \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\overline{\mathcal{M}}(M) := \{f : M \to \overline{\mathbb{R}};\ f \text{ messbar}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{L}(M) := \{f : M \to \overline{\mathbb{R}};\ f \text{ integrierbar}\}.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in \mathcal{L}(M)$ und sei $g \in \overline{\mathcal{M}}(M)$ f.ü. beschränkt. Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g \in \mathcal{L}(M)$ ist.
Insbesondere ist also die Menge der integrierbaren und f.ü. beschränkten numerischen Funktionen eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte) Seien $A, M \in \mathcal{B}$ mit $A \subset M$ und sei $f \in \overline{\mathcal{M}}(M)$. Zeigen Sie:

a) Ist $f \geq 0$ f.ü. auf M, so gilt $\int_A f\, d\lambda \leq \int_M f\, d\lambda$.

b) Ist $f \in \mathcal{L}(M)$ und $\lambda(A) = \lambda(M)$, so ist $\int_A f\, d\lambda = \int_M f\, d\lambda$.

c) Ist $f > 0$ f.ü. auf M, so gilt $\int_M f\, d\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(M) = 0$.

Aufgabe 5 (3+2 Punkte)

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in \mathcal{L}(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Beweisen Sie die CHEBYCHEV-Ungleichung

$$\lambda(\{x \in M;\ |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_M |f| \, d\lambda.$$

b) Seien $f, f_n \in \mathcal{L}(M), n \in \mathbb{N}$, und die Folge

$$\rho_n := \int_M |f_n - f| \, d\lambda$$

konvergiere für $n \to \infty$ gegen 0. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ maßkonvergent gegen f ist.