LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 17. Dezember 2002

10. Übung zur Analysis III

Abgabe: **Dienstag**, 7. Januar 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweise zur Klausur Die erste Scheinklausur findet statt am Freitag, dem 20. 12. 2002 um 14:30 Uhr im Hörsaal Fo 1. Die Dauer beträgt 2 Stunden, zuzüglich 10 Minuten Einarbeitungszeit. Bitte erscheinen Sie pünktlich und bringen Sie Ihren Studierendenausweis und ihren Personalausweis mit. Bei Verspätung bzw. ohne Ausweise ist die Klausurteilnahme i. A. nicht möglich.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Schreib- und Schmierpapier wird zur Verfügung gestellt. Bitte verwenden Sie dokumentenechte Stifte zum Schreiben, nicht jedoch in Rot oder Grün.
Klausurrelevant ist der Vorlesungsstoff bis einschließlich Kapitel XIII sowie der Stoff der ersten acht Übungen.
Nach Abschluss der Korrektur werden die Ergebnisse im Schaukasten am Lehrstuhl A ausgehängt sowie im Internet bekanntgegeben. Die Rückgabe der Klausur erfolgt am 10. 01. 2002 um 13:15 Uhr im Hörsaal V. Bei der Rückgabe haben Sie Gelegenheit, Einwände gegen die Korrektur zu erheben. Später sind keine Beschwerden mehr möglich.

Definition 1 (Maßkonvergenz) Seien $f_k, k \geq 1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ heißt maßkonvergent gegen f, wenn für jedes $\eta > 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(\{x \in M; \|f_k(x) - f(x)\| \geq \eta\}) = 0.$$

Man schreibt: $f_k \underset{\lambda}{\longrightarrow} f$.

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte) Sei M messbar mit endlichem Maß.

a) Jede punktweise konvergente Folge Lebesgue-messbarer Funktionen auf M ist auch maßkonvergent.

b) Gilt die Umkehrung von a)?

c) Ist $f_k \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f$, $f_k \in \mathcal{M}(M)$, so ist $(f_k)_{k\geq 1}$ auch maßkonvergent gegen f.

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Satz von Riesz) Sei $M \in \mathcal{B}$, $\lambda(M) < \infty$. Seien $f_k \in \mathcal{M}(M)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ maßkonvergent gegen $f : M \to \mathbb{R}$, so existiert eine Lebesgue-Nullmenge N und eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\geq 1}$, die auf $M \setminus N$ punktweise gegen f konvergiert.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Seien $f_k, f : M \to \mathbb{R}, M \in \mathcal{B}$, $\lambda(M) < \infty$, f_k messbar und maßkonvergent gegen f. Dann ist f Lebesgue-messbar.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Seien $f_k, f, g : M \to \mathbb{R},, M \in \mathcal{B}$, $\lambda(M) < \infty$ f_k, f messbar und $(f_k)_k$ maßkonvergent gegen f. Dann gilt:

$$(f_k)_{k\geq 1} \text{ ist genau dann maßkonvergent gegen } g \text{, wenn } f = g \text{ f.ü..}$$

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!