LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 10. Dezember 2002

9. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 19. Dezember 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Informationen zur 1. Klausur zur Analysis III
Die Klausur findet am Freitag, dem 20. Dezember 2002, um 14.30 Uhr im Hörsaal Fo 1 statt. Klausurrelevant ist der Vorlesungsstoff bis einschließlich Kapitel XIII sowie der Stoff der ersten acht Übungen.

Aufgabe 1 (5^* Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}$ messbar und sei $g : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist g monoton auf M, so ist g messbar.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathbb{Q}}$ messbar ist, und berechnen Sie

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) (Satz von EGOROFF)
Beweisen Sie:
Sei M eine messbare Menge mit endlichem Maß und sei $(f_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf M, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $E \subset M$ mit $\lambda(E) < \varepsilon$, so dass

$$f_k|_{M\setminus E} \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f|_{M\setminus E}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $M_{ij} = \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{ x \in M;\ |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \right\}$ und schreiben Sie $M\setminus E$ mit geeigneten M_{ij}.