LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 3. Dezember 2002

8. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 12. Dezember 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei X eine nicht-leere Menge. Gegeben sei ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $M_1, M_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$,

(ii) $M_1, M_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow M_1 \setminus M_2 \in \mathcal{M}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie: Es existieren zwei messbare Mengen A, $B \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

$$A \subset M \subset B, \qquad \lambda(A) = \lambda(M) = \lambda(B)$$

A ist abzählbare Vereinigung kompakter Mengen,

B ist abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe von $\lambda^*(M) = \inf\{\lambda(U); M \subset U \subset \mathbb{R}^n, U \text{ offen}\}$, dass $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist. (Also ohne Verwendung der Aussage, das abzählbare Mengen Nullmengen sind.)

Aufgabe 4 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit abzählbar vielen Häufungspunkten messbar ist mit $\lambda(A) = 0$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass eine Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ ohne Häufungspunkte abzählbar ist.)

Aufgabe 5 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = c\} \in \mathcal{B}.$$

Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 6 (2+4+(1+2+1+1)+2+5 Punkte, davon zählen 8 zur Gesamtpunktzahl (also 10 *-Punkte))
Sei $\mathfrak{M}_R := \{A \subset \mathbb{R}; l(A) := \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)\,dx \text{ existiert}\}$ das System der **Riemann–messbaren Teilmengen von** $\mathbb{R}$. Man nennt $l(A)$ die **Länge** von A. Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{M}_R$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \Delta, \cap)$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Es gilt:

$$A \text{ besitzt keinen Häufungspunkt} \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathfrak{M}_R.$$

In diesem Fall gilt $l(A) = 0$. Gilt die Umkehrung?

c) l ist additiv, translationsinvariant und normiert auf $\mathfrak{M}_R$, d.h.

(i) $A, B \in \mathfrak{M}_R,\ A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{M}_R \quad \text{und} \quad l(A \cup B) = l(A) + l(B)$.

(ii) $A \in \mathfrak{M}_R,\ q \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad q + A \in \mathfrak{M}_R \quad \text{und} \quad l(q + A) = l(A)$.

(iii) $l([0;1]) = 1$.

(iii)' Allgemeiner gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$$l([a;b]) = l([a;b)) = l((a;b]) = l((a;b)) = b - a.$$

d) $\mathfrak{M}_R$ ist nicht abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigung.

e) Seien A_j, $j \geq 1$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathbb{R}$ mit $A_j \in \mathfrak{M}_R$ und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}_R$. Zeigen Sie, dass dann sogar (beachte Teil c) (i)) gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} l(A_j) = l(A).$$

Hinweis: Die Sätze der Vorlesung über die Vertauschung von Summation und Integration sind nicht anwendbar. Benutze stattdessen den folgenden
Satz: (Arzela, Osgood, Lebesque)
Sei $f_n \in \mathcal{R}[a;b]$, $n \in \mathbb{N}$, $[a;b]$ ein endliches Intervall. f_n konvergiere gegen f auf $[a;b]$ punktweise mit $f \in \mathcal{R}[a;b]$ und $(f_n)_n$ sei gleichgradig beschränkt auf $[a;b]$.
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dabei sei $\mathcal{R}[a;b]$ die Menge der über $[a;b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen.

Einen Beweis für diesen Satz findet man z.B. bei Apostol: Mathematical Analysis. Einen vergleichbaren Satz findet man auch bei Barner-Flohr: Analysis I.