LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 26. November 2002

7. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 5. Dezember 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (6 Punkte) Sei X eine nicht-leere Menge. Für $A \subset X$ definiert man die **Indikatorfunktion** χ_A zu A durch

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

c) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

d) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.

e) $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$.

f) $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$, d. h. $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei X eine nicht-leere Menge. Dann ist (laut Linerarer Algebra)

$$\mathrm{Abb}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := \{ f : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ Abbildung} \}$$

bei punktweiser Addition und Multiplikation ein Ring. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ein Ring ist, der zu $(\mathrm{Abb}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +, \cdot)$ isomorph ist. Wie sehen das Null- und das Einselement in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ aus? Welche Teilmengen besitzen ein Inverses?
Hinweis: Vermeiden Sie das explizite Nachrechnen der Ringaxiome.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ und es gebe disjunkte offene Mengen U_1 und U_2 mit $M_1 \subset U_1$ und $M_2 \subset U_2$. Zeigen Sie, dass für das äußere LEBESGUE-Maß gilt:

$$\lambda^*(M_1 \cup M_2) = \lambda^*(M_1) + \lambda^*(M_2).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Berechnen Sie das LEBESGUE-Maß des abgeschlossenen und des offenen gleichseitigen Dreiecks im $\mathbb{R}^2$ mit Grundseite $[a, b] \times \{0\}$ mit Hilfe von Korollar XIII(3.15) (im Skript: XIII(3.13)).

Aufgabe 5 $(3 + 3 + 3^*$ Punkte) Gegeben sei das abgeschlossene, gleichseitige Dreieck D im $\mathbb{R}^2$ mit Grundseite $[0, 1] \times \{0\}$. Von diesem Dreieck entfernen wir dasjenige offene, gleichseitige Dreieck, das durch die Seitenmittelpunkte von D gegeben ist. Es bleiben drei gleichseitige Dreiecke übrig. Von diesen entfernen wir ebenfalls die offenen Mittelpunktdreiecke und erhalten so neun Dreiecke. Setzt man diese Iteration unendlich oft fort, erhält man das sogenannte SIERPINSKI-Dreieck S (WACLAW SIERPINSKI, 1882–1969).

a) Gegeben Sie eine formal präzise Definition des Sierpinski-Dreiecks S an (vgl. Definition des CANTORschen Diskontinuums).

b) Zeigen Sie mit Aufgabe 4, dass das SIERPINSKI-Dreieck S eine kompakte Nullmenge ist. Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\lambda(\alpha \cdot M) = |\alpha|^n \lambda(M)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle LEBESGUE-messbaren Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$.

c) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in S$ der Mittelpunkt der Strecke von x zu jedem der drei äußeren Eckpunkte wieder in S liegt.