LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 6. November 2002

4. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 14. November 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+5 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsgesamtheit der folgenden Systeme von Differentialgleichungen:

a) $$\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + e^x. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen.
Zeigen Sie: Ist $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x) \cdot y$, so erhält man alle Lösungen $\Psi(x)$ von $y' = A(x)y + b(x)$ durch

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot c + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(u)}{W(u)} \, du,$$

mit $c \in \mathbb{K}^n$ und $x, x_0 \in I$, wobei $W(u) := \det(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$ und $W_j(u) := \det(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_{j-1}(u), b(u), \varphi_{j+1}(u), \ldots, \varphi_n(u))$ sind.

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)

a) Berechnen Sie $e^{xA}, x \in \mathbb{R}$, mit

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 + 2e^x \\ y_2' &= y_2 + e^{-x} \\ y_3' &= y_1 - 2e^x, \end{aligned}$$

indem Sie sich über den Exponentialansatz eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems verschaffen.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

a) Ist λ ein Eigenwert der reellen, konstanten $n \times n$–Matrix A

Man nennt v einen Hauptvektor (k-ter Stufe) von A zu λ ($k \in \mathbb{N}$), wenn v das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)^k v = 0$$

löst mit $v \neq 0$ und $(A - \lambda E)^{k-1} v \neq 0$.

Zeigen Sie: Dann ist

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(A-\lambda E)^j v}{j!} x^j$$

eine nichttriviale Lösung von $y' = A \cdot y$.

b) Ist A eine beliebige, reelle, konstante $(n \times n)$-Matrix und λ ein Eigenwert von A der Vielfachheit k, dann existieren genau k (komplex) linear unabhängige Hauptvektoren von A zu λ (maximal k-ter Stufe).

A hat n (komplex) linear unabhängige Hauptvektoren.

Aufgabe 5 (5*+3 Punkte) Lösen Sie als Anwendung zu Aufgabe 4 die Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ mit

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ sowie

b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$.