LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 29. Oktober 2002

3. Übung zur Analysis III

Abgabe: Donnerstag, 7. November 2002, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils einen integrierenden Faktor zu den folgenden aus der Vorlesung bekannten Typen von Differentialgleichungen:

a) $y' = f(x)g(y), \quad f$ stetig, g differenzierbar mit $g(y) \neq 0$ (Separation der Variablen),

b) $y' = a(x)y + b(x), \quad a, b$ stetig (inhomogene lineare Differentialgleichung).

Aufgabe 2 (2+3 Punkte) Seien $G = D \times \mathbb{R}$ und $f : G \to \mathbb{R}$ gegeben durch

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos y}{1-x^2}$ mit $D = (-1,1)$,

b) $f(x,y) = |x^n y \cos(x)|$, $n \in \mathbb{N}$, mit $D = \mathbb{R}$.

Überprüfen Sie, ob das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

für jedes $(x_0, y_0) \in G$ lokal eindeutig lösbar ist.
Was kann über die Fortsetzbarkeit der lokalen Lösungen gesagt werden?

Aufgabe 3 (4+4+3 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to \mathrm{Mat}(2 \times 2;\, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. Auf I gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie: Man erhält eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}^2$, durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $u, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) g,$$
$$u' = \frac{a_{12}}{\varphi_1}\, g.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_+^*$:

$$y_1' = -y_1 + \frac{1}{x} y_2 + \log x + \frac{1}{x},$$
$$y_2' = (1-x) y_1 + y_2 + (x-1)\log x.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$.

c) Geben Sie ein Fundamentalsystem (ψ_1, ψ_2) von Lösungen des homogenen Systems aus b) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante dieses Lösungssystems (ψ_1, ψ_2). Berechnen Sie weiter für $x \geq 1$

$$\exp\left(\int_1^x \text{Spur } A(t)\, dt\right).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Berechnen Sie die Lösungsgesamtheit des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2, \\ y_3' &= -y_1 + y_3. \end{aligned}$$