LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 07. Dezember 2001

9. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 17.12.2001, bis 11.00 Uhr

Bemerkung: Bei den Begriffen $N_f(R)$ und $M_f(R)$ (bzw. ähnlichen Begriffen) werde ich die Funktion f meistens nicht als Index, sondern in der Klammer schreiben (siehe unten).

Aufgabe 1 (Ordnung von f und f')(7 Punkte):
Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

$$o(f) = o(f').$$

Hinweis: Man beweise zunächst Ungleichungen des Typs $M(r,f) \leq rM(r,f') + |f(0)|$ und $M(r,f') \leq \frac{M(2r,f)}{r}$ und schließe daraus die Behauptung.

Aufgabe 2* (Ordnung einer Potenzreihe)
Sei f eine ganze Funktion mit der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Zeigen Sie:

$$o(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}},$$

wobei für $a_n = 0$ der Ausdruck $\frac{n\log n}{\log \frac{1}{|a_n|}}$ als Null definiert ist. Dabei ist zusätzlich $o(f) = \infty$, falls f nicht von endlicher Ordnung ist.

Aufgabe 3 (Beispiele von Ordnungen)(8 Punkte):
Die Funktionen f, g, h seien in folgender Weise durch Potenzreihen um 0 gegeben:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{\delta}} z^n \quad (\delta > 0),$$
$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{n}{(\log)^\delta}} z^n \quad (0 < \delta < 1),$$
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n^{1+\delta}} z^n \quad (\delta > 0),$$

a) Zeigen Sie, dass f, g, h ganz sind.

b) Berechnen Sie die Ordnung von f, g, h.

Bemerkung: Damit existiert für alle $\alpha \geq 0$ (∞ eingeschlossen) ein ganzes f mit $o(f) = \alpha$.

Aufgabe 4 (Werteverteilungslehre I)(10 Punkte)
Definition: Es sei $0 < R_0 \leq \infty$ und f meromorph in $K_{R_0}(0)$.

a) Die Funktion $\log^+ : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\log^+ x := \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1, \\ \log x & x \geq 1. \end{cases}$$

b) Für $0 \leq t < R_0$ sei $n(t, f)$ die Anzahl der Polstellen von f in $\overline{K_t(0)}$, wobei jede Stelle so oft gezählt wird, wie ihre Vielfachheit angibt.

c) Die Funktionen $m(\cdot, f), N(\cdot, f), T(\cdot, f) : (0; R_0) \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi, \\ N(r, f) &= \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r, \\ T(r, f) &= m(r, f) + N(r, f). \end{aligned}$$

$m(r, f)$ heißt Schmiegungsfunktion von f, $N(r, f)$ heisst Anzahlfunktion (der Polstellen) von f und $T(r, f)$ heißt Charakteristik von f.

Man zeige folgende Aussagen:

(i) Für $x > 0$ und $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt:

1) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.
2) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.
3) $\log x \leq \log^+ x$
4) $\log^+(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \leq \log^+ x_1 + \ldots + \log^+ x_n$.
5) $\log^+(x_1 + \ldots + x_n) \leq \log^+ x_1 + \ldots + \log^+ x_n + \log n$.

(ii) Man zeige, dass die verallgemeinerte Jensenformel aus Übung 8 Aufgabe 3 c) übergeht in

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log |c_k|.$$

Hinweis: Jeder einzelne Term in der Formel lässt sich mit Hilfe dieser Terme berechnen. Man berechne diese Formeln zuerst. Hier nochmal die verallgemeinerte Jensenformel:

Korollar: Sei $0 < R \leq \infty$, f meromorph in $\{z; |z| < R\}$. $(a_\mu)_\mu$ seien die Nullstellen und $(b_\nu)_\nu$ die Folge der Polstellen in $K_R(0)$. Sei weiterhin $0 < r = |z| < R$ und habe f die folgende Laurententwicklung um Null:

$$f(z) = c_k z^k + O(z^{k+1}) \quad \text{mit} \quad c_k \neq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt:

$$\log |c_k| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi})| d\phi - \sum_{0 < |a_\mu| < r} \log \frac{r}{|a_\mu|} + \sum_{0 < |b_\nu| < r} \log \frac{r}{|b_\nu|} - k \log r.$$