LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 23. November 2001

7. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 03.12.2001, bis 11.00 Uhr

Aufgabe 1 (**endliches Blaschke-Produkt**)(6 Punkte):
Es sei f holomorph in $\mathbb{E}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist eine k-blättrige Überlagerung (Definition siehe Übung 5 Aufgabe 3) von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}$.

(ii) Es gibt Punkte $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{E}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$f(z) = e^{i\alpha} \prod_{n=1}^{k} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}.$$

Bemerkung: Das Produkt in (ii) heißt endliches Blaschke-Produkt.
Hinweis: Es ist leichter zu zeigen, dass eine Funktion konstant ist.

Aufgabe 2 (**harmonische Funktionen I**) (8 Punkte)
Zeigen Sie:

a) $u = \log|z|$ ist harmonisch in $\dot{\mathbb{E}}$, aber sie ist nicht Realteil einer holomorphen Funktion.

b) Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ bestimme man alle harmonischen Funktionen u, für die u^2 harmonisch ist.

c) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f \circ u$ für alle in einem Gebiet D harmonischen Funktionen u harmonisch in D ist.

Aufgabe 3 (**Integralberechnung**)(6 Punkte):
Zeigen Sie für $R > 0$ und $a \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\phi} - a| \, d\phi = \log(\max\{R, |a|\}).$$

Aufgabe 4* (**Poissonkern**)
Sei $D = K_r(z_0)$ und $f : \partial D \to \mathbb{C}$ stetig. Weiterhin sei

$$\phi : D \to \mathbb{C}, \; \phi(z) = \int_0^{2\pi} f(\zeta) P(\zeta, z) \, d\theta \text{ mit } \zeta = re^{i\theta}.$$

Zeigen Sie:
ϕ ist genau dann holomorph in D, wenn $\int_{\partial D} f(\zeta)\zeta^n d\zeta = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.
Hinweis: Man entwickle den Poissonkern $P(\zeta, z)$ mit Hilfe der geometrische Reihe.