LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 9. November 2001

5. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Freitag, 16.11.2001, bis 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Einfacher Zusammenhang**)(6 Punkte):
Definition:

(i) Es sei $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. D heisst *einfach zusammenhängend*, wenn $D = \widehat{\mathbb{C}}$ ist oder wenn $T(D)$ einfach zusammenhängend ist für eine Möbiustransformation T mit $\infty \notin T(D)$.

(ii) Sind $D, G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und ist f meromorph und injektiv in D mit $f(D) = G$, so heisst f eine *konforme Abbildung* von D auf G. D und G heißen dann auch *konform äquivalent*.

Zeigen Sie:

a) Die Definition ist unabhängig von der gewählten Möbiustransformation T.

b) Man charakterisiere alle einfach zusammenhängenden Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit Hilfe der konformen Äquivalenz (analog zu XXII (5.4)).

Aufgabe 2 (**Injektive Funktionen**) (6 Punkte)
Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und f holomorph in D. Zeigen Sie: Hat $\mathrm{Re}(f')$ keine Nullstellen in D, dann ist f injektiv in D.
Bemerkung: Das Gleiche gilt natürlich für den Imaginärteil. **Hinweis:** Widerspruchsbeweis. Zeige zunächst $\int_0^1 \mathrm{Re}(f'(\gamma(t)))dt = 0$ für geeignetes γ.

Aufgabe 3 (**Eigentliche Abbildungen I**)(2 Punkte):
Definition: Es sei $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D. $(z_n)_n$ heisst *Randfolge* in D, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_n \in D \setminus K$ für $n \geq n_0$.
Zeichen: $z_n \to \partial D$. Zeigen Sie

a) $z_n \to \partial D$ gilt genau dann, wenn $(z_n)_n$ keinen Häufungspunkt in D hat.

b*) Es seien $D, G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : D \to G$ meromorph und nicht konstant. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ ist $f^{-1}(K)$ kompakt.

(ii) Für jede Randfolge $(z_n)_n$ in D ist $(f(z_n))_n$ eine Randfolge in G.

(iii) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit: jedes $w \in G$ hat genau k Urbilder in D. Dabei wird jede $w-Stelle$ so oft gezählt wie ihre Vielfachheit angibt. (Insbesondere gilt also $f(D) = G$.)
Eine solche Funktion heisst *eigentliche* Abbildung oder *k-blättrige Überlagerung* (von D auf G).

Aufgabe 4 (**Eigentliche Abbildungen II**) (6 Punkte):
Unter Benutzung von Aufgabe 3 zeige man:
Sei $f = \frac{P}{Q}$ eine nicht-konstante rationale Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ in durchgekürzter Form. Sei n der Grad von P und m der Grad von Q und $k := \max\{n, m\} \geq 1$. Man zeige, dass f für alle $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ genau k w-Stellen entsprechend der Vielfachheit gezählt in $\widehat{\mathbb{C}}$ hat. k heisst Grad der rationalen Funktion.