LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 19. Oktober 2001

2. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Freitag, 26.10.2001, bis 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Möbiustransformationen I**)(6 Punkte):

a) Sei K ein Kreis oder eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ und sei $T:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation. Dann ist $T(K)$ wieder ein Kreis oder eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$.

b) Seien D_1, D_2 offene Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ und $T:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation mit $T(\partial D_1) = \partial D_2$. Dann gilt entweder

$$\begin{array}{lll} & T(D_1) = D_2 & \text{und} \quad T(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{D_1}) = \widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{D_2} \\ \text{oder} & T(D_1) = \widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{D_2} & \text{und} \quad T(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{D_1}) = D_2. \end{array}$$

c) Sei $T:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation. Dann gilt entweder

(i) T hat einen Fixpunkt oder

(ii) T hat zwei Fixpunkte oder

(iii) T ist die Identität.

Aufgabe 2 (**Möbiustransformationen II**)(6 Punkte):

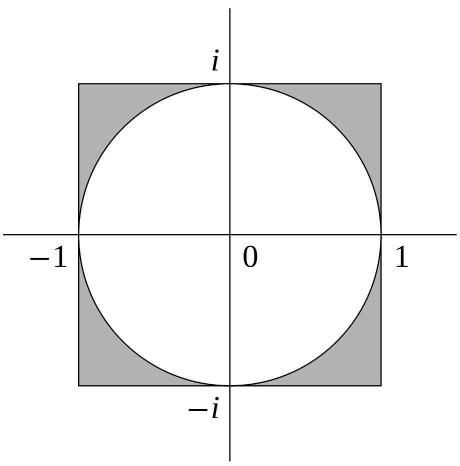
a) Man gebe die (eindeutig bestimmte) Möbiustransformation $S:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ an, die gegebene paarweise verschiedene $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ folgendermaßen abbildet:

$$S(z_2) = 1, \quad S(z_3) = 0, \quad S(z_4) = \infty.$$

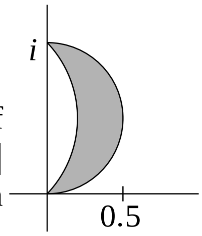
b) Man bestimme eine Möbiustransformation $T:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$T(-1) = 0, \quad T(i) = 1, \quad T(\infty) = -i.$$

c) Bestimmen und skizzieren Sie den grauen Bereich unter der Möbiustransformation $T:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$, $T(z) = 1/z$.



d) Man bestimme eine Möbiustransformation $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, die den grauen Bereich auf einen Winkelraum $W = \{z \in \mathbb{C}; z = re^{i\varphi} r > 0, 0 < \varphi < \varphi_0\}$ für ein $\varphi_0 \in (0; 2\pi]$ abbildet. Man führe eine geeignete Größe a ein und bestimme φ_0 für dieses T in Abhängigkeit von a.



Aufgabe 3 (SCHWARZ**sches Lemma und** SCHWARZ**sche Derivierte**) (4 Punkte):

a) Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit $f(0) = 0$. Desweiteren gelte $K_\rho(0) \subset f(\mathbb{E})$ für ein $\rho > 0$. Man finde eine möglichst einfache (d.h. leicht zu überprüfende) Bedingung, so dass $|f'(0)| \geq \rho$ gilt.

b*) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion. Die SCHWARZsche Derivierte $\mathrm{SD}_f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ wird definiert durch

$$\mathrm{SD}_f(z) := \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Man zeige: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine (nicht-konstante) Möbiustransformation, wenn $\mathrm{SD}_f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 4 (**Automorphismen**)(4 Punkte):
Für $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und paarweise verschiedene $z_i \in \widehat{\mathbb{C}}, i = 1, \ldots, r$ sei $G := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_i; i = 1, \ldots, r\}$.

a*) Man zeige, dass $\mathrm{Aut}(G)$ genau aus den Möbiustransformationen besteht, die die z_i untereinander permutieren.

b*) Bestimme explizit $\mathrm{Aut}(G)$ für folgende Gebiete G_i:

(i) $G_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}$,

(ii) $G_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$,

(iii) $G_3 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty, z_4\}$,

(iv) $G_4 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

c) Man bestimme $\mathrm{Aut}(G)$ für den Kreisring $G = K_{r,R}$ mit $0 \leq r < R$.