LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 07. Februar 2002

16. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 25.03.2002, bis 12.00 Uhr

Hinweis: Aufgabe 3 und Aufgabe 4 aus der letzten Übung können sofern nicht vorgerechnet bis zum 25.03 abgegeben werden. Die Punkte dieser Übung zählen für dieses Semester. Sie wird in der ersten Übungsstunde des nächsten Semesters vorgerechnet.

Aufgabe 1 (**Perioden I**)(4 Punkte):
Es sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \Omega$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) ω ist Teil einer Basis von Ω, d.h. es existiert ein $\omega' \in \Omega$ mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$.

(ii) m_1 und m_2 sind teilerfremd.

(iii) ω ist in Ω nicht divisibel, d.h. $\frac{1}{n}\omega \notin \Omega$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

Aufgabe 2 (**Perioden II**)(3 Punkte):
Es sei $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Existenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängiger ganzer Funktionen f_n mit $\mathrm{Per}(f_n) = \mathbb{Z}\omega$.

Aufgabe 3 (**Erzeuger von** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$)(4 Punkte):
Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 4 (**Eisensteinreihen**)(3 Punkte):
Es sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\tau = \omega_1/\omega_2$. Zeigen Sie: Die Matrix

$$S = |\omega_2|^2 \begin{pmatrix} |\tau|^2 & \mathrm{Re}\,\tau \\ \mathrm{Re}\,\tau & 1 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit und für $\alpha > 2$ gilt

$$\sum_{0\neq\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha} = \sum_{0\neq g\in\mathbb{Z}^2} ({}^t gSg)^{-\alpha/2}.$$

Aufgabe 5 (**minimale Durchmesser**)(5 Punkte):
Es sei Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C},+)$ die $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ erzeugt.
Zeigen Sie: Für eine Basis $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ von Ω sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $|\mathrm{Re}(\omega_2/\omega_1)| \leq \frac{1}{2}$ und $|\omega_2/\omega_1| \geq 1$.

(ii) $|\omega_1| = \min\{\, |\omega| \mid 0 \neq \omega \in \Omega \,\}$ und $|\omega_2| = \min\{\, |\omega| \mid \omega \in \Omega \backslash \mathbb{Z}\omega_1 \,\}$.

In diesem Fall gilt $\delta(\omega_1,\omega_2) \leq \delta(\omega'_1,\omega'_2)$ für jede Basis ω'_1,ω'_2 von Ω, wenn $\delta(\omega_1,\omega_2)$ den Durchmesser des von ω_1 und ω_2 aufgespannten Parallelogramms bezeichnet.

Aufgabe 6 (gerade und ungerade Funktionen)(2+3 Punkte):

a) Ein gerades $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nimmt alle seine Werte bereits in dem Dreieck mit den Ecken $0,\omega_1,\omega_2$ an.

b) Sei $\omega \in \Omega$ und $f \in \mathcal{K}(\Omega)$. Ist f ungerade, so hat f an der Stelle $z = \frac{\omega}{2}$ einen Pol oder eine Nullstelle, und zwar von ungerader Ordnung. Ist f gerade, so ist die Ordnung von f an der Stelle $z = \frac{\omega}{2}$ gerade.