LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 24. Januar 2002

14. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 04.02.2002, bis 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Produktdarstellungen**)(6 Punkte): $\omega(n)$ bezeichne die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n. Zeigen Sie für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s} = \zeta(s)^2,$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)}n^{-s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$$

Aufgabe 2 (**Li-Funktion**)(4 Punkte):
Zeigen Sie: $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 3 (**Eulersche Summenformel**)(10^*+10 Punkte):

a*) Seien $0 < a < b$ und $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b (t-[t])f'(t)dt + f(a)(a-[a]) - f(b)(b-[b]).$$

b) Für alle $x \geq 1$ gilt:
$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(x^{-1}).$$

c) Für alle $x \geq 1$ und für alle $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:
$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}).$$

d) Für alle $x \geq 1$ gilt:
$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + O(\sqrt{x}).$$

e*)
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \quad \text{für} \quad s \downarrow 1.$$

Hinweis: bei e*) benutze man c).