LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 10. Januar 2002

12. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 21.01.2002, bis 11.00 Uhr

Aufgabe 1 (GAUSS**sche Ψ-Funktion**)(6 Punkte):
Sei $\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Man zeige, dass Ψ eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist mit genau (einfachen) Polstellen in $-\mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{Res}_{-n}(\Psi) = -1$. Weiterhin stelle man Ψ und Ψ' als (unendliche) Reihen dar, berechne $\Psi(1)$ und zeige

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad \Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot \pi z.$$

Aufgabe 2 (**unendliches Blaschke-Produkt**)(6 Punkte):
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{E}\setminus\{0\}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass das folgende Produkt eine in $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion f definiert:

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z} \quad (z \in \mathbb{E}).$$

f heißt das mit der Nullstellenfolge (a_n) gebildete Blaschke-Produkt. Vergleiche mit Übung 7 Aufgabe 1 (endliches Blascke-Produkt).

Aufgabe 3 (EULER**sche Beta-Funktion**)(8 Punkte):
Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$ sei

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

Man zeige:

a) B ist stetig.

b) $B(\cdot,\cdot)$ ist holomorph als Funktion von 2 Variablen auf $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, d. h. für festes w (mit $\mathrm{Re}(w) > 0$) ist $z \to B(z,w)$ holomorph in der rechten Halbebene $\mathcal{H}$ und für festes z (mit $\mathrm{Re}(z) > 0$) ist $w \to B(z,w)$ holomorph in $\mathcal{H}$.

c)
$$B(z+1,w) = \frac{z}{z+w}B(z,w) \quad \text{und} \quad B(1,w) = \frac{1}{w}.$$

d)
$$B(z,w) = B(w,z).$$

e)
$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

f)
$$B(z,w) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt.$$

g)
$$B(z,w) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\phi)^{2z-1}(\cos\phi)^{2w-1}d\phi.$$

Hinweis: Nach Analysis II Übung 5 Aufgabe 2 gelten a), c), d) und e) für positive reelle z, w.