

10. Übung zur Höheren Funktionentheorie

Abgabe: Montag, 07.01.2001, bis 11.00 Uhr

Definition: Ist $a \in \mathbb{C}$ und $f - a \not\equiv 0$, so heißt $N(r, \frac{1}{f-a})$ Anzahlfunktion der a -Stellen von f und $m(r, \frac{1}{f-a})$ Schmiegunsfunktion für den Wert a .

Als Schreibweisen wird in der Literatur auch manchmal Folgendes benutzt:

$$m(r, a, f) := m(r, \frac{1}{f-a}) \quad N(r, a, f) := N(r, \frac{1}{f-a}) \quad m(r, \infty, f) := m(r, f).$$

Aufgabe 1 (Beispiele für Charakteristiken)(7 Punkte):

a) Für eine konstante Funktion $f \equiv c$ ist

$$T(r, f) = \log^+ |c| = O(1) \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

b) Ist f eine rationale Funktion vom Grad d , so ist

$$T(r, f) = d \log r + O(1) \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

c) Für $f(z) = e^z$ und $g(z) = e^{-z}$ ist

$$T(r, f) = T(r, g) = \frac{r}{\pi}.$$

Aufgabe 2 (Erster Hauptsatz der Wertverteilungslehre)(8 Punkte)

a) Es sei $0 < R_0 \leq \infty$ und f meromorph in $K_{R_0}(0)$. Desweiteren sei $a \in \mathbb{C}$ und $f - a \not\equiv 0$. Dann ist

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(\infty) \quad \text{für } r \rightarrow R_0.$$

Genauer gilt: Ist $f(z) - a = c_k(a)z^k + \dots$ die Laurententwicklung von $f - a$ in $z = 0$ mit $c_k(a) \neq 0$, so ist

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + \eta(r, a)$$

mit

$$|\eta(r, a)| \leq |\log |c_k(a)|| + \log^+ |a| + \log 2.$$

b) Man folgere, dass für eine meromorphe nicht-konstante Funktion f in \mathbb{C} gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f) = \infty.$$

Hinweis: Man benutze die Jensen-Formel (letzte Übung) auf die Funktion $f - a$.

Aufgabe 3* (Berühmte Zitate)(6* Punkte):

Man ordne folgende Zitate berühmten Persönlichkeiten zu (Computer erlaubt und erwünscht) und füge die so erhaltenen Buchstaben zu zwei Wörtern zusammen. Dabei steht N für Nachname und n.V für den n-ten Vornamen für $n \in \mathbb{N}$ und die Zahl danach für den gesuchten Buchstaben. Die Zitate sind bis auf eines auf Englisch, damit man aus der Sprache nicht zuviele Informationen bekommt.

2.V1 God does arithmetic.

N1 Über welchen Mathematiker wird im dritten Zitat gesprochen?

2.V2 When you have eliminated the impossible, what ever remains, however improbable must be the truth.

2.V1 Über welche Mathematikerin wird im vierten Zitat gesprochen?

N1 I remember once going to see him when he was lying ill at Putney. I had ridden in taxi cab number 1729 and remarked that the number seemed to me rather a dull one and that I hoped it was not an unfavorable omen. "No", he replied, "it is a very interesting number, it is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways."

N1 I can testify that she is a great mathematician, but that she is a woman, I can not swear.

N3 An expert is someone who knows some of the worst mistakes that can be made in his subject and how to avoid them.

N1 Mathematics is written for mathematicians.

N1 Mathematics is a game played to certain simple rules with meaningless marks on paper.

N5 God made the integers, all else is the work of man.

V7 Numbers written on restaurant bills within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other piece of paper in any other parts of the Universe.

Hier gibt es für die Fortsetzung des Zitats einen Extrapunkt.

N1 To divide a cube into two other cubes, a fourth power in general any power whatever into two powers of the same denomination above the second is impossible and I have assuredly found an admirable proof of this, but the margin is too narrow to contain it.

N6 Gott würfelt nicht.

N4 I don't believe in mathematics.

N7 The whole is more than the sum of its parts.

Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn alle Persönlichkeiten mit Vor- und Nachnamen erwähnt sind und das Resultat dasteht. Zwei Extrapunkte gibt es für die zeitliche Einordnung aller Persönlichkeiten und einen weiteren für die Vervollständigung des Zitats. Keine Punkte gibt es für korrekt gefundene Zitate, die nicht der Intention des Aufgabenstellers entsprechen.

Aufgabe 4* (Gedicht)(3* Punkte):

Welche Zahl beschreibt das folgende Gedicht und nach welchem Mathematiker ist sie benannt? Geben Sie zusätzlich die Lebensdaten dieses Mathematikers an.

Poe, E.
Near a Raven

Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".