LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 13. Februar 2002

16. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 8. April 2002, **bis 12 Uhr** im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Die Punkte dieser Übung zählen nicht mehr mit zur Gesamtpunktzahl in Analysis I. Sie können mit diesen Punkten aber noch eventuelle Defizite ausgleichen, um diesen Teil der Scheinbedingung zu erfüllen.
Die Übung wird in der ersten Woche im neuen Semester am Übungstermin vorgerechnet.

Hinweise zur 2. und 3. Klausur. Die 2. Klausur findet statt am Freitag, dem 22. 02. 2002 um 14:15 Uhr im Hörsaal Fo 1, die 3. Klausur am Freitag, dem 12. 04. 2002, ebenfalls um 14:15 Uhr im Hörsaal Fo 1. Die Dauer beträgt jeweils 2 Stunden, zuzüglich 10 Minuten Einarbeitungszeit. Bitte erscheinen Sie pünktlich und bringen Sie Ihren Studierendenausweis und ihren Personalausweis mit. Bei Verspätung bzw. ohne Ausweise ist die Klausurteilnahme i. A. nicht möglich.
Zur Erinnerung: Zum Bestehen der Klausuren sind jeweils 15 Punkte erforderlich. Den Schein erhalten Sie bei zwei bestandenen Klausuren, in denen Sie zusammen mindestens 45 Punkte erreicht haben. Weiterhin müssen Sie für den Schein ein Drittel der Punkte in den Übungen erreicht haben.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Schreib- und Schmierpapier wird zur Verfügung gestellt. Bitte verwenden Sie dokumentenechte Stifte zum Schreiben, nicht jedoch in Rot oder Grün.
Nach Abschluss der Korrektur werden die Ergebnisse im Schaukasten am Lehrstuhl A ausgehängt sowie im Internet bekanntgegeben. Die Rückgabe der 2. Klausur erfolgt am 26. 2. 2002 um 14:00 Uhr im Hörsaal II. Bei der Rückgabe haben Sie Gelegenheit, Einwände gegen die Korrektur zu erheben. Später sind keine Beschwerden mehr möglich. Der Rückgabetermin der 3. Klausur wird später bekanntgegeben.
Die 2. Klausur konzentriert sich auf den Stoff der Vorlesung ab Kapitel IV bis zum Semesterende. In der 3. Klausur wird es keine besondere Gewichtung geben.

Diskussionsstunden in der vorlesungsfreien Zeit. In der Zeit vom 4. bis zum 10. April werden die folgenden Diskussionsstunden angeboten. Sie können diese nutzen, um vor der 3. Klausur noch Fragen zu klären.

Datum	Zeit	Hörsaal	Thema
Do, 04.04.2002	10:00–11:30 Uhr	IV	Reelle/komplexe Zahlen und Funktionen
Fr, 05.04.2002	10:00–11:30 Uhr	IV	Folgen
Mo, 08.04.2002	10:00–11:30 Uhr	IV	Reihen
Di, 09.04.2002	10:00–11:30 Uhr	IV	Stetigkeit
Mi, 10.04.2002	10:00–11:30 Uhr	IV	Differentialrechnung

Aufgabe 1 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen sinh, cosh, tanh, arsinh, arcosh und artanh auf den jeweiligen Definitionsbereichen.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{1-\frac{1}{x}}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit, bestimmen Sie maximale Intervalle, auf denen f monoton ist, sowie alle (lokalen und globalen) Extremstellen von f.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Die Funktion f sei stetig in $[0,\infty)$ und differenzierbar in $(0,\infty)$. Es gelte $f(0) \leq 0$, und f' sei in $(0,\infty)$ monoton wachsend.
Zeigen Sie: $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ ist in $(0,\infty)$ monoton wachsend.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal im inneren Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar. Die *n-ten Ableitungen* von f in $x_0 \in D$ seien sukzessive definiert durch:

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)\,, \quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)\,,$$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)\,, \quad x_0 \in D.$$

Man beweise die *Leibniz–Produktregel*:
Sind f und g n-mal differenzierbar in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, so gilt:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Aufgabe 5 (2+2+3 Punkte)

a) Gegeben sei das Polynom $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Was kann man über die Lage der Nullstellen von $p'(x)$ sagen, ohne $p'(x)$ zu berechnen?

b) Seien $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ und $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Man zeige, dass für kein $x \in (0,1]$ gilt:

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Steht dies im Widerspruch zum verallgemeinerten Mittelwertsatz?

c) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq \pi/2$ die Ungleichung $\sin x \geq x \cos x$ erfüllt ist, und schließen Sie daraus, dass für dieselben x gilt: $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.

Aufgabe 6 (3 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung:

$$\arctan(x) + \arctan(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{für } x > 0.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Bilden Sie die 1. Ableitungen der folgenden Funktionen für $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \left(\cos \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)^{16}, \qquad f_2(x) = e^{1/(x^2+3)}\,.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Sei $l_1(x) := \log x$, $l_{k+1}(x) := l_1(l_k(x)), k \in \mathbb{N}$. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(l_k)$ von l_k an und zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{d\,l_k}{dx}(x) = \frac{1}{x} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{l_j(x)} \quad ,x \in D(l_k).$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \sin \frac{8}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. Geben Sie die Ableitung an und zeigen Sie, dass die Ableitung in 0 nicht stetig ist.