LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 4. Februar 2002

15. Übung zur Analysis I

Abgabe: Dienstag, 12. Februar 2002, **bis 10 Uhr** im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Punkte, die mit einem $*$ versehen sind, zählen nicht mit zur Gesamtpunktzahl.
Die Diskussionsstunde von Marc Ensenbach am Rosenmontag (Dies) fällt aus. Bitte besuchen Sie in dieser Woche eine der anderen Diskussionsstunden.

Aufgabe 1 (6+2 Punkte) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$. (Verwenden Sie für die Differenzierbarkeit dabei nur die Definition.)

a) $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ für $k \in \{0,1,2\}$,

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Zeigen Sie direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit: $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $\log'(x) = \frac{1}{x}$. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 von Übung 14.)

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitungen von sin und cos.

b) Untersuchen Sie die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x \sin(x)|$$
auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt und in π.

Aufgabe 4 (3^*+2^*+2^* Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$$
konvergiert. (Der Grenzwert ist die Eulersche Konstante $\gamma = 0,57721\ldots$.)
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fällt und $a_n \geq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Es seien $p,q \in \mathbb{N}$ mit $p \geq q$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit
$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}$$
gegen $\log(p/q)$ konvergiert.

c) Zeigen Sie:
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \log(2).$$