LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 14. Januar 2002

12. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 21. Januar 2002, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \geq 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [0,\infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Aufgabe 2 (2+2+4+4 Punkte) Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen und die Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremden } p,q \in \mathbb{Z},\ q > 0, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$

d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - [x]$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)(1 - g(x))$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in Null mit $f(0) = 0$. Ferner gelte $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Beweisen Sie, dass die Menge der Nullstellen von f eine abgeschlossene Menge ist.

Aufgabe 5 (3+2 Punkte) Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass es höchstens eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\mathbb{Q}} = g$ geben kann.

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem keine derartige Funktion f existiert.