LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 17. Dezember 2001

10. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 7. Januar 2002, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Die Punkte, die mit einem $*$ versehen sind, zählen nicht mit zur Gesamtpunktzahl.

Aufgabe 1 (3+2+3 Punkte)

a) Es sei $(b_k)_{k\geq 1}$ eine komplexe Folge mit der Eigenschaft, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert.
Zeigen Sie: $(b_k)_{k\geq 1}$ ist beschränkt.

b) Geben Sie ein Beispiel an für folgende Aussage:
Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergent und $(b_k)_{k\geq 1}$ eine beschränkte komplexe Folge, so braucht $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ nicht mehr zu konvergieren.

c) Zeigen Sie:
Ist $(b_k)_{k\geq 1}$ eine beschränkte komplexe Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so sind auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^m$, $m \in \mathbb{N}$, absolut konvergent.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a_k)_{k\geq 1}$ eine reelle Folge mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$.

a) Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$ mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1 - \frac{c}{k} \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b) Gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 - \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen von $\sum |a_k|$ beschränkt ist bzw. dass die harmonische Reihe eine Minorante von $\sum a_k$ ist. (Dies ist das Kriterium von Raabe.)

Aufgabe 3 (3+3* Punkte)

a) Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ definiert durch

$$a_k := \begin{cases} 0, & \text{falls die Ziffer 3 in der Dezimaldarstellung von } k \text{ auftritt} \\ 1/k, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist.

b) Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ definiert durch

$$a_k := \begin{cases} 1/k, & \text{falls die Dezimaldarstellung von } k \text{ auf 31122001 endet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent ist.

Aufgabe 4 (3* Punkte) Geben Sie möglichst explizit eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ an, die bestimmt gegen ∞ divergiert. Verschieben Sie dazu die negativen Summanden geeignet nach „hinten“, wobei sichergestellt sein muss, dass jedes Reihenglied schließlich doch berücksichtigt wird.

Aufgabe 5 (je 2 Punkte) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz (wie immer mit Begründung). Schreiben Sie anschließend die Buchstaben aus den entsprechenden Feldern (also 3 Buchstaben pro Reihe) hintereinander. Einen Extrapunkt gibt es für die Angabe der Herkunft und der Bedeutung des sich ergebenden Ausdrucks.

Reihe	bedingte Konvergenz		absolute Konvergenz	
	ja	nein	ja	nein
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	ak	bl	e	i
b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{2^{n^2}}$	m	k	as	ba
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}\binom{3n}{n}$	ta	hi	r	t
e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$	eo	mu	m	n
f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{Z}, 0 < \lvert q\rvert < 1$	e	a	de	or
g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$	to	la	n	u
h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$	fi	go	r	z
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n^3}-1\right)^n$	a	t	im	al
j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-kn}k^n, \quad k \in \mathbb{N}$	as	it	u	e

Aufgabe 6 (3 Punkte) Zeigen Sie $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, indem Sie das Cauchy-Produkt der Reihen von sin und cos berechnen und geeignet vereinfachen.

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!