LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 10. Dezember 2001

9. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 17. 12. 2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Die Punkte dieses Übungsblattes zählen nicht zur Gesamtpunktzahl in diesem Semester, von der Sie 1/3 erreichen müssen. Geben Sie aber bearbeitete Aufgaben ab, dann werden Ihnen die erreichten Punkte gutgeschrieben.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge und $(A_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $A_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so ist auch $(A_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Folgt umgekehrt aus der Konvergenz von $(A_n)_{n\geq 1}$ auch die Konvergenz von $(a_n)_{n\geq 1}$?

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{k} n \cdot q^{n-1} = \frac{1 - q^k(1 + k(1-q))}{(1-q)^2}$$

(Dabei wird $0^0 = 1$ gesetzt.)

b) Zeigen Sie, dass für $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 3 von Übung 6.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

a) Sei $a_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Beweisen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}.$$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{k}}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k+\frac{1}{k}}$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

alternierend ist, d. h. darstellbar als $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.
Ist die Reihe konvergent?