LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 3. Dezember 2001

8. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 10.12.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweise zur 1. Klausur. Die 1. Klausur findet statt am Donnerstag, dem 20. 12. 2001 um 18:30 Uhr im Hörsaal AM. Die Dauer beträgt 2 Stunden, zuzüglich 10 Minuten Einarbeitungszeit. Bitte erscheinen Sie pünktlich und bringen Sie Ihren Studierendenausweis und ihren Personalausweis mit. Bei Verspätung bzw. ohne Ausweise ist die Klausurteilnahme i. A. nicht möglich.
Zur Erinnerung: Zum Bestehen der Klausur sind 15 Punkte erforderlich. Den Schein erhalten Sie bei zwei bestandenen Klausuren, in denen Sie zusammen mindestens 45 Punkte erreicht haben. Weiterhin müssen Sie für den Schein am Ende des Semesters ein Drittel der Punkte in den Übungen erreicht haben.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Schreib- und Schmierpapier wird zur Verfügung gestellt. Bitte verwenden Sie dokumentenechte Stifte zum Schreiben, nicht jedoch in Rot oder Grün.
Nach Abschluss der Korrektur werden die Ergebnisse im Schaukasten am Lehrstuhl A ausgehängt sowie im Internet bekanntgegeben. Die Rückgabe der Klausur erfolgt am 9. 1. 2002 um 14:30 Uhr im Hörsaal I. Bei der Rückgabe haben Sie Gelegenheit, Einwände gegen die Korrektur zu erheben. Später sind keine Beschwerden mehr möglich.
Klausurrelevant ist der Vorlesungsstoff bis einschließlich Kapitel III sowie der Stoff der ersten acht Übungen.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $q \in (0,1)$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine komplexe Folge mit der Eigenschaft

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < q|a_{n+1} - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert. Folgt die Konvergenz auch noch, wenn man $q = 1$ zulässt?

Aufgabe 2 (5 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$. Die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ seien rekursiv definiert durch $a_1 = a$, $b_1 = b$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie, dass die Intervalle $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung bilden. Der eindeutig bestimmte Punkt im Durchschnitt dieser Intervalle (also der gemeinsame Grenzwert der Folgen (a_n) und (b_n)) heißt das *arithmetisch-geometrische Mittel* von a und b.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte) Untersuchen Sie folgende Folgen komplexer Zahlen auf Konvergenz:

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{\sqrt{n} - n^2 \cdot i}{n + n^2 \cdot i}$ für $n \in \mathbb{N}$,

b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$, A und B abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = [0,1]$. Zeigen Sie: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Aufgabe 5 (3+2 Punkte) Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ bezeichne $H(A)$ die Menge aller Häufungspunkte von A. Beweisen Sie:

a) $H(X) \cup X$ ist abgeschlossen für alle $X \subset \mathbb{R}$.

b) $H(X_1 \cup X_2) = H(X_1) \cup H(X_2)$ für alle $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (4+2 Punkte)

a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n+1} + (-a)^n \right\}.$$

b) Gegeben sei die Menge

$$N := \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Untersuchen Sie N auf Offenheit und Abgeschlossenheit.