LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 26. November 2001

7. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 3.12.2001, bis 12 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (2+2+3+2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2+5}{13n^2+n-2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+9n+1}-2n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$ für $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge mit $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{x_k;\ k \geq n\}\right)$$

(Analog kann man zeigen: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\{x_k;\ k \geq n\}\right)$.)

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$\text{Aus } \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ folgt } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ seien beschränkte reelle Folgen. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \min\{\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n\}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, in dem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n < \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$

gilt.

Aufgabe 5 (7 Punkte) Untersuchen Sie, ob die durch

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1+\tfrac{1}{3}a_n^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad b_1 = 0,\ b_{n+1} = \frac{1}{4-3b_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ wohldefiniert sind und konvergieren. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.